

CHƯƠNG 0 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. HỆ THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa các giá trị lượng giác:

$$\overline{OP} = \cos a$$

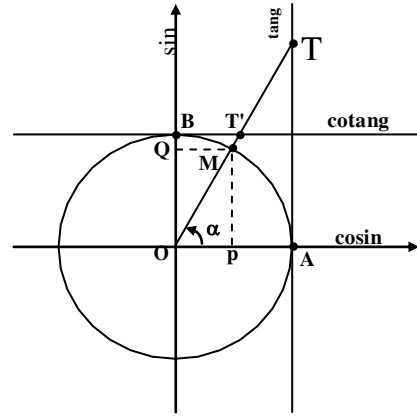
$$\overline{OQ} = \sin a$$

$$\overline{AT} = \tan a$$

$$\overline{BT'} = \cot a$$

Nhận xét:

- $\forall a, -1 \leq \cos a \leq 1; -1 \leq \sin a \leq 1$
- $\tan a$ xác định khi $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
- $\cot a$ xác định khi $a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$



2. Dấu của các giá trị lượng giác:

Cung phần tư	I	II	III	IV
Giá trị lượng giác				
$\sin a$	+	+	-	-
$\cos a$	+	-	-	+
$\tan a$	+	-	+	-
$\cot a$	+	-	+	-

3. Hệ thức cơ bản:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1; \quad \tan a \cdot \cot a = 1$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}; \quad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

4. Cung liên kết:

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

Cung hơn kém π	Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$
$\cot(\pi + a) = \cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

5. Bảng giá trị lượng giác của các góc (cung) đặc biệt

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	180^0	270^0	360^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	0		0
cotg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1		0	

II. CÔNG THỨC CỘNG

Công thức cộng:

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a \\ \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}\end{aligned}$$

Hệ quả: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

III. CÔNG THỨC NHÂN

1. Công thức nhân đôi:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}; \quad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}$$

2. Công thức hạ bậc:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

3. Công thức nhân ba:

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$$

4. Công thức biểu diễn $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$ theo $t = \tan \frac{a}{2}$:

Đặt: $t = \tan \frac{a}{2}$ ($a \neq \pi + 2k\pi$) thì: $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

IV. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

1. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$$

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$$

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \cdot \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left(a - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin \left(a - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$$

2. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Vấn đề 1: TẬP XÁC ĐỊNH, TẬP GIÁ TRỊ, TÍNH CHẤM – LẼ, CHU KỲ

$y = \sin x$: Tập xác định $D = \mathbb{R}$; tập giá trị $T = [-1, 1]$; hàm lẻ, chu kỳ $T_0 = 2\pi$.

* $y = \sin(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$

* $y = \sin(f(x))$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

$y = \cos x$: Tập xác định $D = \mathbb{R}$; Tập giá trị $T = [-1, 1]$; hàm chẵn, chu kỳ $T_0 = 2\pi$.

* $y = \cos(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$

* $y = \cos(f(x))$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

$y = \tan x$: Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$; tập giá trị $T = \mathbb{R}$, hàm lẻ, chu kỳ $T_0 = \pi$.

* $y = \tan(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$

* $y = \tan(f(x))$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$y = \cot x$: Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; tập giá trị $T = \mathbb{R}$, hàm lẻ, chu kỳ $T_0 = \pi$.

* $y = \cot(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$

* $y = \cot(f(x))$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

* $y = f_1(x)$ có chu kỳ T_1 ; $y = f_2(x)$ có chu kỳ T_2

Thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Bài 1. Tìm tập xác định và tập giá trị của các hàm số sau:

$$a/ y = \sin\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

$$b/ y = \sqrt{\sin x}$$

$$c/ y = \sqrt{2 - \sin x}$$

$$d/ y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$e/ y = \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$$

$$f/ y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$g/ y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$h/ y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)}$$

$$i/ y = \frac{1}{\tan x - 1}$$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$a/ y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

$$b/ y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$$

$$c/ y = \sqrt{\sin x}$$

$$d/ y = 4\sin^2 x - 4\sin x + 3$$

$$e/ y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$$

$$f/ y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$$

$$g/ y = \sin x + \cos x$$

$$h/ y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$$

$$i/ y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 3$$

Bài 3. Xét tính chẵn – lẻ của hàm số:

$$a/ y = \sin 2x$$

$$b/ y = 2\sin x + 3$$

$$c/ y = \sin x + \cos x$$

$$d/ y = \tan x + \cot x$$

$$e/ y = \sin^4 x$$

$$f/ y = \sin x \cdot \cos x$$

$$g/ y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$$

$$h/ y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$$

$$i/ y = \tan|x|$$

Bài 4. Tìm chu kỳ của hàm số:

$$a/ y = \sin 2x$$

$$b/ y = \cos \frac{x}{3}$$

$$c/ y = \sin^2 x$$

$$d/ y = \sin 2x + \cos \frac{x}{2}$$

$$e/ y = \tan x + \cot 3x$$

$$f/ y = \cos \frac{3x}{5} - \sin \frac{2x}{7}$$

$$g/ y = 2\sin x \cdot \cos 3x$$

$$h/ y = \cos^2 4x$$

$$i/ y = \tan(-3x + 1)$$

ĐS: a/ π . b/ 6π . c/ π . d/ 4π . e/ π . f/ 70π . g/ π . h/ $\frac{\pi}{4}$. i/ $\frac{\pi}{3}$

Vấn đề 2: ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1/ Vẽ đồ thị hàm số lượng giác:

- Tìm tập xác định D.
- Tìm chu kỳ T_0 của hàm số.
- Xác định tính chẵn – lẻ (nếu cần).
- Lập bảng biến thiên trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ T_0 có thể chọn:

$$x \in [0, T_0] \text{ hoặc } x \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right].$$

- Vẽ đồ thị trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ.
- Rồi suy ra phần đồ thị còn lại bằng phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = k.T_0.\vec{i}$ về bên trái

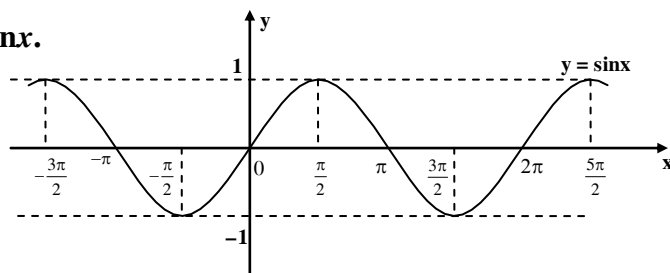
và phải song song với trục hoành Ox (với \vec{i} là véc tơ đơn vị trên trục Ox).

2/ Một số phép biến đổi đồ thị:

- a/ Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x) + a$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ lên trên trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến xuống phía dưới trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- b/ Từ đồ thị $y = f(x)$, suy ra đồ thị $y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng đồ thị $y = f(x)$ qua trục hoành.
- c/ Đồ thị $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$ được suy từ đồ thị $y = f(x)$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ nằm ở phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Ví dụ 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = \sin x$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1, 1]$.
- Chu kỳ: $T = 2\pi$.
- Bảng biến thiên trên đoạn $[0, 2\pi]$



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0

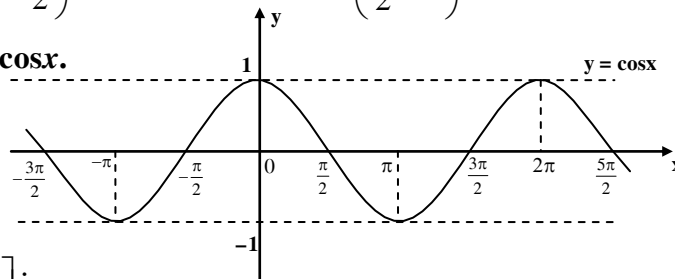
- Tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = 2k\pi\vec{i}$ ta được đồ thị $y = \sin x$.

Nhận xét:

- Đồ thị là một hàm số lẻ nên nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ và nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = \cos x$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1, 1]$.
- Chu kỳ: $T = 2\pi$.
- Bảng biến thiên trên đoạn $[0, 2\pi]$:



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1

- Tính tiến theo vectơ $\vec{v} = 2k\pi \cdot \vec{i}$ ta được đồ thị $y = \cos x$.

Nhận xét:

- Đồ thị là một hàm số chẵn nên nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 3: Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = \tan x$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

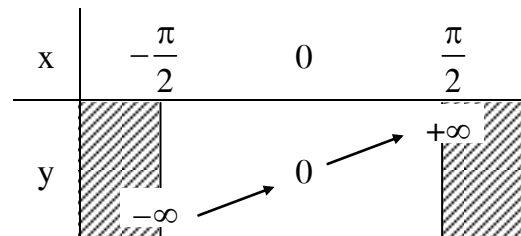
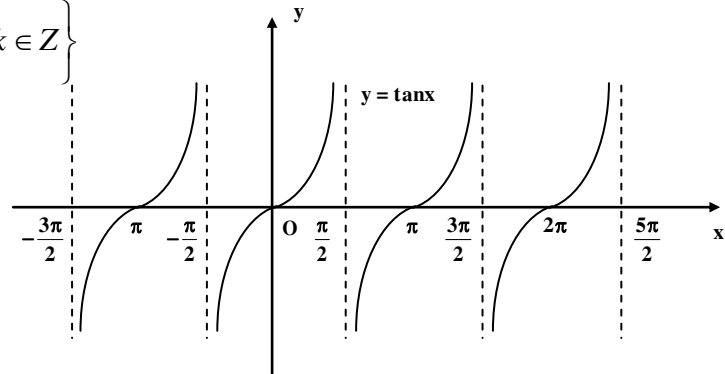
- Tập giá trị: \mathbb{R} .

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} y = \infty$

$\Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{2}$: là tiệm cận đứng.

- Chu kỳ: $T = \pi$.

- Bảng biến thiên trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:



- Tính tiến theo vectơ $\vec{v} = k\pi \cdot \vec{i}$ ta được đồ thị $y = \tan x$.

Nhận xét:

- Đồ thị là một hàm số lẻ nên nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số luôn đồng biến trên tập xác định D.

Ví dụ 4: Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = \cot x$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

- Tập giá trị: \mathbb{R} .

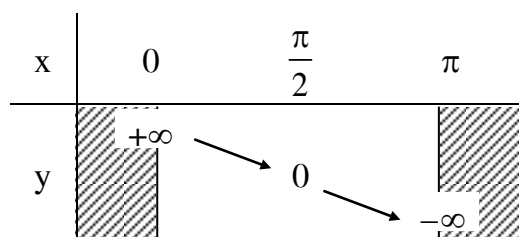
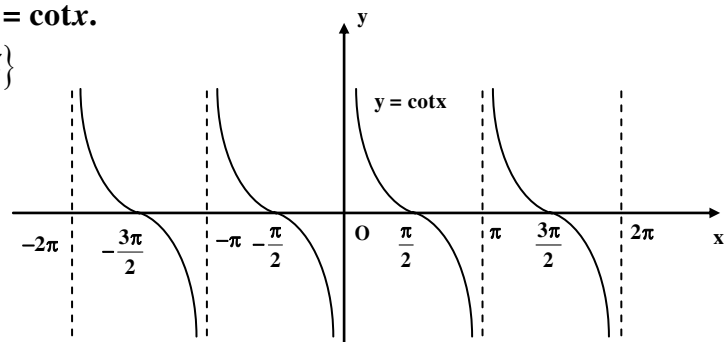
- Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} y = -\infty$$

tiệm cận đứng: $x = 0, x = \pi$.

- Chu kỳ: $T = \pi$.

- Bảng biến thiên trên đoạn $[0, \pi]$:



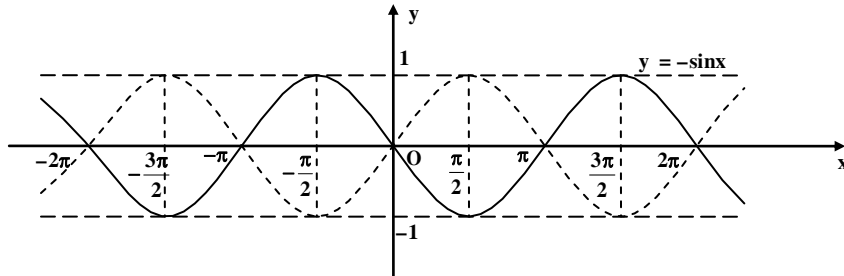
- Tính tiến theo vectơ $\vec{v} = k\pi \cdot \vec{i}$ ta được đồ thị $y = \cot x$.

Nhận xét:

- Đồ thị là một hàm số lẻ nên nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số luôn giảm trên tập xác định D.

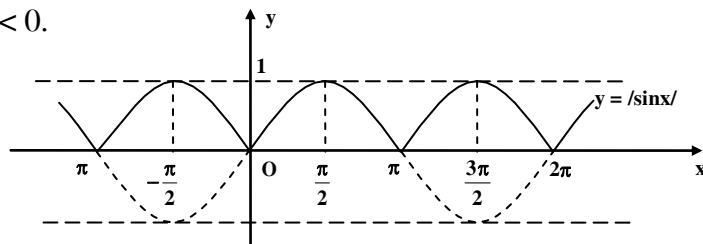
Ví dụ 5: Vẽ đồ thị $y = -\sin x$.

- Vẽ đồ thị $y = \sin x$.
- Từ đồ thị $y = \sin x$, ta suy ra đồ thị $y = -\sin x$ bằng cách lấy đối xứng qua Ox.



Ví dụ 6: Vẽ đồ thị $y = |\sin x|$

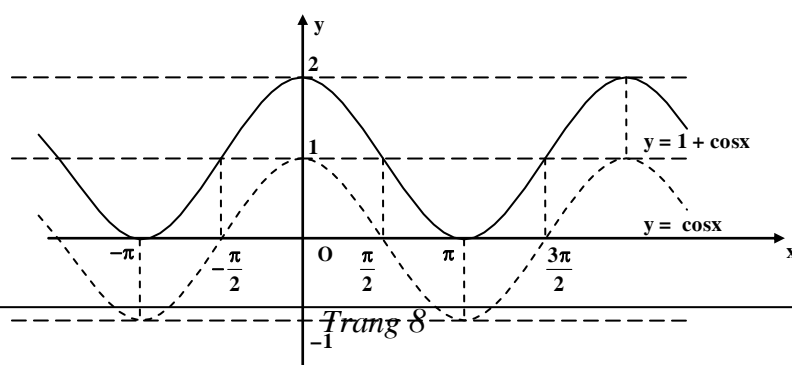
$$y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } \sin x \geq 0 \\ -\sin x, & \text{nếu } \sin x < 0. \end{cases}$$



Ví dụ 7: Vẽ đồ thị hàm số $y = 1 + \cos x$.

- Vẽ đồ thị $y = \cos x$.
- Từ đồ thị $y = \cos x$, ta suy ra đồ thị $y = 1 + \cos x$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = \cos x$ lên trục hoành 1 đơn vị.
- Bảng biến thiên trên đoạn $[0, 2\pi]$:

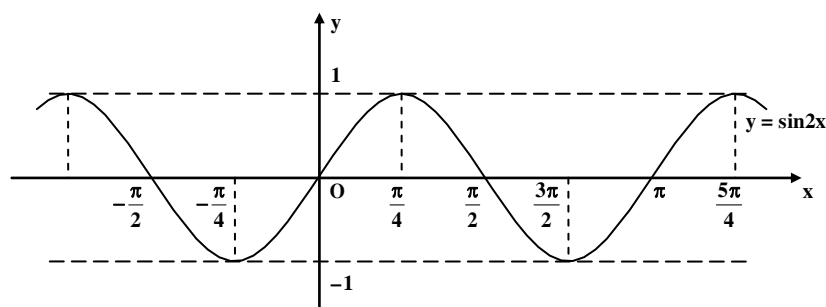
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	0	-1	0	1
$y = 1 + \cos x$	2	1	0	1	2



Ví dụ 8: Vẽ đồ thị $y = \sin 2x$.

- $y = \sin 2x$ có chu kỳ $T = \pi$.
- Bảng biến thiên trên đoạn $[0, 2\pi]$:

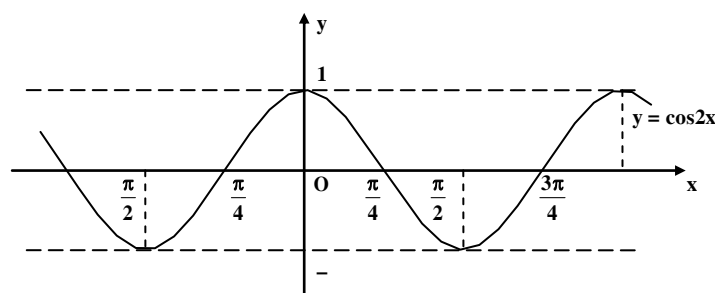
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
2x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y = sin2x	0	$\rightarrow -1$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow 0$



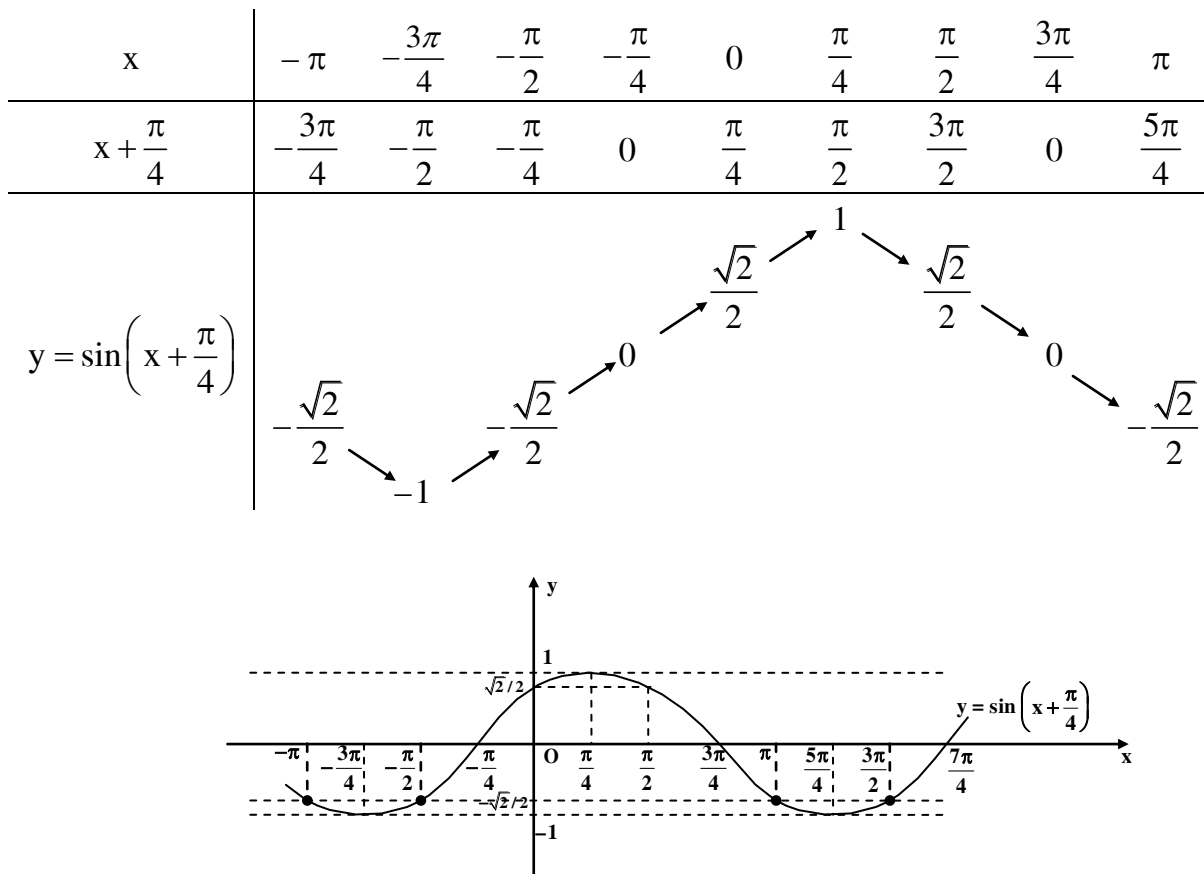
Ví dụ 9: Vẽ đồ thị $y = \cos 2x$.

- $y = \cos 2x$ có chu kỳ $T = \pi$.
- Bảng biến thiên trên đoạn $[0, 2\pi]$:

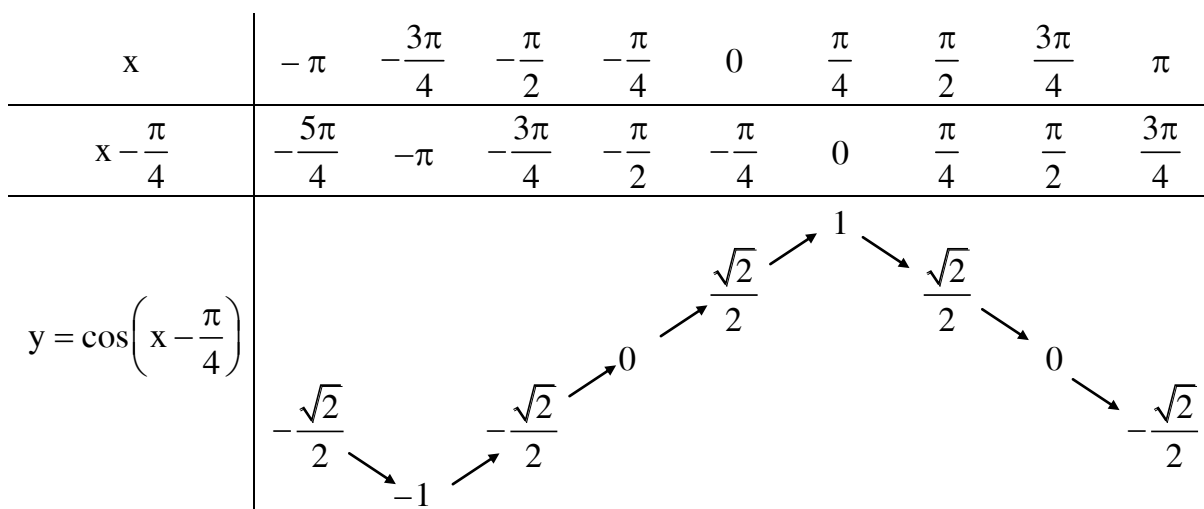
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
2x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y = cos2x	$\rightarrow -1$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow -1$



Ví dụ 10: Vẽ đồ thị $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có chu kỳ $T = 2\pi$.

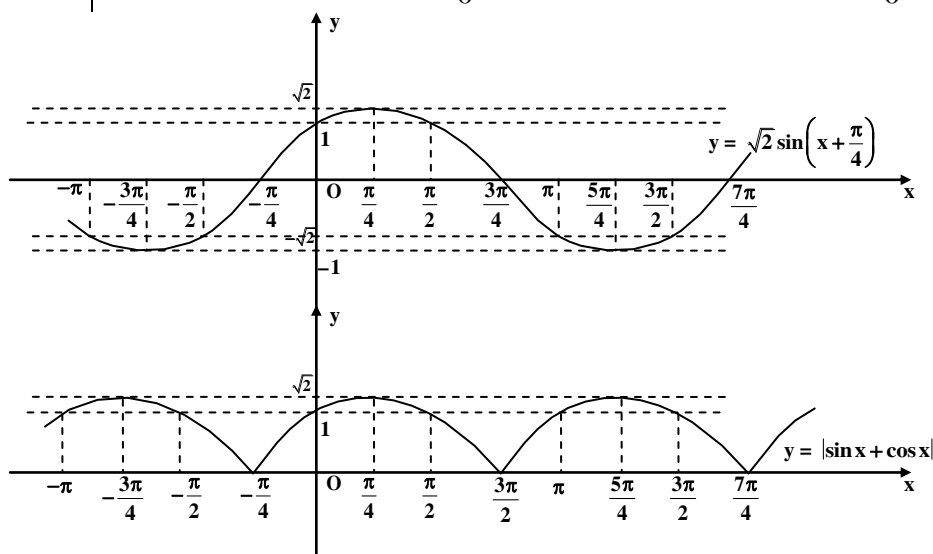


Ví dụ 11: Vẽ đồ thị $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ có chu kỳ $T = 2\pi$.



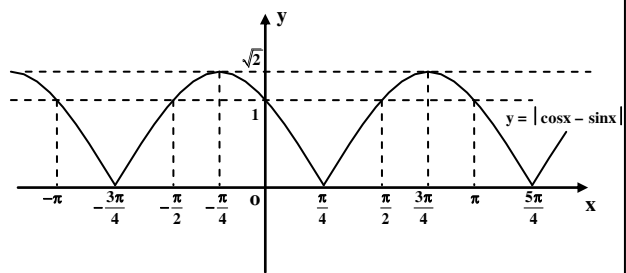
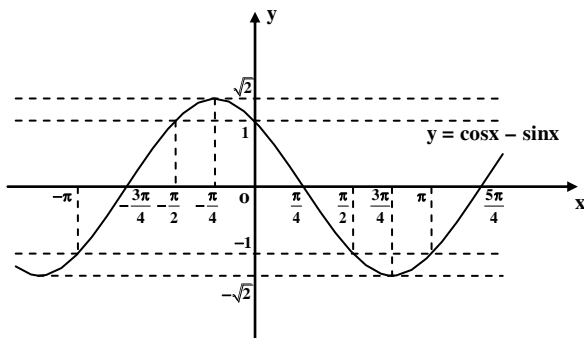
Ví dụ 12: Vẽ đồ thị $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có chu kỳ $T = 2\pi$.

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$x + \frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1
$ \sin x + \cos x $	1	$\sqrt{2}$	1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	1



Ví dụ 13: Vẽ đồ thị $y = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có chu kỳ $T = 2\pi$.

x	π	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos x - \sin x$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1
$ \cos x - \sin x $	1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	1	$\sqrt{2}$	1

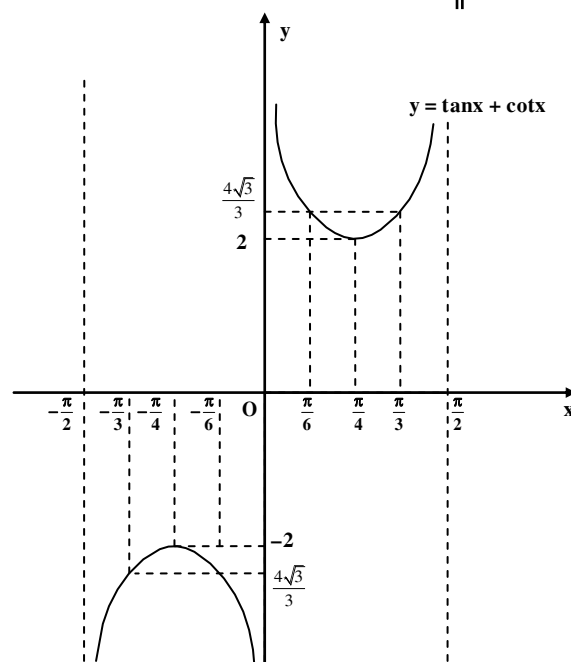


Ví dụ 14: Vẽ đồ thị $y = \tan x + \cot x$.

– Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

– Chu kỳ $T = \pi$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	\parallel	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\parallel
$\cot x$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	\parallel	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$y = \tan x + \cot x$	$-\infty$	$-\frac{4\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$



II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình $\sin x = \sin \alpha$

$$a/ \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$b/ \begin{cases} \sin x = a. \text{ Điều kiện: } -1 \leq a \leq 1. \\ \sin x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$c/ \sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v)$$

$$d/ \sin u = \cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$e/ \sin u = -\cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$$

Các trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Phương trình $\cos x = \cos \alpha$

$$a/ \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b/ \begin{cases} \cos x = a. \text{ Điều kiện: } -1 \leq a \leq 1. \\ \cos x = a \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$c/ \cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v)$$

$$d/ \cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$e/ \cos u = -\sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$$

Các trường hợp đặc biệt:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

3. Phương trình $\tan x = \tan \alpha$

a/ $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

b/ $\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

c/ $\tan u = -\tan v \Leftrightarrow \tan u = \tan(-v)$

d/ $\tan u = \cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$

e/ $\tan u = -\cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$

Các trường hợp đặc biệt:

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

4. Phương trình $\cot x = \cot \alpha$

$\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Các trường hợp đặc biệt:

$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

5. Một số điều cần chú ý:

a/ Khi giải phương trình có chứa các hàm số tang, cotang, có mẫu số hoặc chứa căn bậc chẵn, thì nhất thiết phải đặt điều kiện để phương trình xác định.

* Phương trình chứa $\tan x$ thì điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

* Phương trình chứa $\cot x$ thì điều kiện: $x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

* Phương trình chứa cả $\tan x$ và $\cot x$ thì điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$

* Phương trình có mẫu số:

- $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

- $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

- $\tan x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$

- $\cot x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$

b/ Khi tìm được nghiệm phải kiểm tra điều kiện. Ta thường dùng một trong các cách sau để kiểm tra điều kiện:

1. Kiểm tra trực tiếp bằng cách thay giá trị của x vào biểu thức điều kiện.
2. Dùng đường tròn lượng giác.
3. Giải các phương trình vô định.

Bài 1. Giải các phương trình:

$$\begin{array}{lll}
 1) \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 & 2) \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 & 3) \cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1 \\
 4) \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 & 5) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 & 6) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1 \\
 7) \sin(3x + 1) = \frac{1}{2} & 8) \cos(x - 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} & 9) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 10) \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{2} & 11) \tan(2x - 1) = \sqrt{3} & 12) \cot(3x + 10^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\
 13) \tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 & 14) \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 & 15) \cos(2x + 25^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{array}$$

Bài 2. Giải các phương trình:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sin(3x + 1) = \sin(x - 2) & 2) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \\
 3) \cos 3x = \sin 2x & 4) \sin(x - 120^\circ) + \cos 2x = 0 \\
 5) \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 & 6) \sin 3x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0 \\
 7) \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & 8) \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\
 9) \tan(2x + 1) + \cot x = 0 & 10) \cos(x^2 + x) = 0 \\
 11) \sin(x^2 - 2x) = 0 & 12) \tan(x^2 + 2x + 3) = \tan 2 \\
 13) \cot^2 x = 1 & 14) \sin^2 x = \frac{1}{2} \\
 15) |\cos x| = \frac{1}{2} & 16) \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 x
 \end{array}$$

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Dạng	Đặt	Điều kiện
$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$	$t = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
$a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$	$t = \cot x$	$x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Nếu đặt: $t = \sin^2 x$ hoặc $t = |\sin x|$ thì điều kiện: $0 \leq t \leq 1$.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$

2) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$

3) $4\cos^5 x \cdot \sin x - 4\sin^5 x \cdot \cos x = \sin^2 4x$

4) $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$

5) $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\sin x + \sqrt{3} = 0$

6) $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$

7) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$

8) $\cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1) $4\sin^2 3x + 2(\sqrt{3} + 1)\cos 3x - \sqrt{3} = 4$

2) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$

3) $4\cos^2(2 - 6x) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13$

4)

$\frac{1}{\cos^2 x} - (3 + \sqrt{3})\tan x - 3 + \sqrt{3} = 0$

5) $\frac{3}{\cos x} + \tan^2 x = 9$

6) $9 - 13\cos x + \frac{4}{1 + \tan^2 x} = 0$

7) $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$

8) $\frac{1}{\cos^2 x} + 3\cot^2 x = 5$

9) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$

10) $2\cos 2x + \tan x = \frac{4}{5}$

Bài 3. Cho phương trình $\left(\sin x + \frac{\sin 3x + \cos 3x}{1 + 2\sin 2x} \right) = \frac{3 + \cos 2x}{5}$. Tìm các nghiệm của phương trình thuộc $(0; 2\pi)$.

Bài 4. Cho phương trình: $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \cdot \cos 2x + 3\cos 2x + 1$. Tìm các nghiệm của phương trình thuộc $(-\pi; \pi)$.

Bài 5. Giải phương trình: $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{5}{4}$.

III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO SINX VÀ COSX

DẠNG: $a \sin x + b \cos x = c$ (1)

Cách 1:

- Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Đặt: $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\alpha \in [0, 2\pi])$

phương trình trở thành: $\sin \alpha \cdot \sin x + \cos \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta \quad (2)$$

- Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2.$$

- (2) $\Leftrightarrow x = \alpha \pm \beta + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Cách 2:

a/ Xét $x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có là nghiệm hay không?

b/ Xét $x \neq \pi + k2\pi \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} \neq 0$.

Đặt: $t = \tan \frac{x}{2}$, thay $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta được phương trình bậc hai theo t:

$$(b+c)t^2 - 2at + c - b = 0 \quad (3)$$

Vì $x \neq \pi + k2\pi \Leftrightarrow b+c \neq 0$, nên (3) có nghiệm khi:

$$\Delta' = a^2 - (c^2 - b^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2.$$

Giải (3), với mỗi nghiệm t_0 , ta có phương trình: $\tan \frac{x}{2} = t_0$.

Ghi chú:

1/ Cách 2 thường dùng để giải và biện luận.

2/ Cho dù cách 1 hay cách 2 thì điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

3/ Bất đẳng thức B.C.S:

$$|y| = |a \cdot \sin x + b \cdot \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \min y = -\sqrt{a^2 + b^2} \text{ và } \max y = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{a} = \frac{\cos x}{b} \Leftrightarrow \tan x = \frac{a}{b}$$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- 1) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$
- 2) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$
- 3) $\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}$
- 4) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$
- 5) $(\sqrt{3} - 1) \sin x - (\sqrt{3} + 1) \cos x + \sqrt{3} - 1 = 0$
- 6) $\sqrt{3} \sin 2x + \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) = 1$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

- 1) $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$
- 2) $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3} (\sin 6x + \cos 8x)$
- 3) $8 \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$
- 4) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$
- 5) $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2} \cos 13x$
- 6) $(3 \cos x - 4 \sin x - 6)^2 + 2 = -3(3 \cos x - 4 \sin x - 6)$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

- 1) $3 \sin x - 2 \cos x = 2$
- 2) $\sqrt{3} \cos x + 4 \sin x - \sqrt{3} = 0$
- 3) $\cos x + 4 \sin x = -1$
- 4) $2 \sin x - 5 \cos x = 5$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

$$1) 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad 2) \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}$$

Bài 5. Tìm m để phương trình : $(m + 2)\sin x + m\cos x = 2$ có nghiệm .

Bài 6. Tìm m để phương trình : $(2m - 1)\sin x + (m - 1)\cos x = m - 3$ vô nghiệm.

IV. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI

$$\text{DẠNG: } a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d \quad (1)$$

Cách 1:

- Kiểm tra $\cos x = 0$ có thoả mãn hay không?

$$\text{Lưu ý: } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1.$$

- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$$a \cdot \tan^2 x + b \cdot \tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

- Đặt: $t = \tan x$, đưa về phương trình bậc hai theo t:

$$(a - d)t^2 + b \cdot t + c - d = 0$$

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc

$$(1) \Leftrightarrow a \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + b \cdot \frac{\sin 2x}{2} + c \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = d$$

$$\Leftrightarrow b \cdot \sin 2x + (c - a) \cdot \cos 2x = 2d - a - c \quad (\text{phương trình bậc nhất đối với } \sin 2x \text{ và } \cos 2x)$$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1) 2\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cos x + (1 - \sqrt{3})\cos^2 x = 1$$

$$2) 3\sin^2 x + 8\sin x \cos x + (8\sqrt{3} - 9)\cos^2 x = 0$$

$$3) 4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 4$$

$$4) \sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$5) 2\sin^2 x(3 + \sqrt{3})\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = -1$$

$$6) 5\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 2$$

$$7) 3\sin^2 x + 8\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0$$

$$8) (\sqrt{2} - 1)\sin^2 x + \sin 2x + (\sqrt{2} + 1)\cos^2 x = \sqrt{2}$$

$$9) (\sqrt{3} + 1)\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = 0$$

$$10) 3\cos^4 x - 4\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$$

$$11) \cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1 = 0$$

$$12) 2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$1) \sin^3 x + 2\sin^2 x \cos^2 x - 3\cos^3 x = 0 \quad 2) \sqrt{3}\sin x \cos x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

Bài 3. Tìm m để phương trình : $(m + 1)\sin^2 x - \sin 2x + 2\cos^2 x = 1$ có nghiệm.

Bài 4. Tìm m để phương trình : $(3m - 2)\sin^2 x - (5m - 2)\sin 2x + 3(2m + 1)\cos^2 x = 0$ vô nghiệm .

V. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG

Dạng 1: $a.(\sin x \pm \cos x) + b.\sin x.\cos x + c = 0$

- Đặt: $t = \cos x \pm \sin x = \sqrt{2}.\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right); |t| \leq \sqrt{2}.$

$$\Rightarrow t^2 = 1 \pm 2 \sin x.\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

- Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình bậc hai theo t. Giải phương trình này tìm t thỏa $|t| \leq \sqrt{2}$. Suy ra x.

Lưu ý dấu:

- $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Dạng 2: $a.|\sin x \pm \cos x| + b.\sin x.\cos x + c = 0$

- Đặt: $t = |\cos x \pm \sin x| = \sqrt{2}.\left|\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)\right|; Đk : 0 \leq t \leq \sqrt{2}.$

$$\Rightarrow \sin x.\cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

- Tương tự dạng trên. Khi tìm x cần lưu ý phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Bài 1. Giải các phương trình:

- $2 \sin 2x - 3\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + 8 = 0$
- $2(\sin x + \cos x) + 3 \sin 2x = 2$
- $3(\sin x + \cos x) + 2 \sin 2x = -3$
- $(1 - \sqrt{2})(1 + \sin x + \cos x) = \sin 2x$
- $\sin x + \cos x - 4 \sin x.\cos x - 1 = 0$
- $(1 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - \sin 2x = 1 + \sqrt{2}$

Bài 2. Giải các phương trình:

- $\sin 2x - 4(\cos x - \sin x) = 4$
- $5 \sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$
- $(1 - \sqrt{2})(1 + \sin x - \cos x) = \sin 2x$
- $\cos x - \sin x + 3 \sin 2x - 1 = 0$
- $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$
- $(\sin x - \cos x)^2 - (\sqrt{2} + 1)(\sin x - \cos x) + \sqrt{2} = 0$

Bài 3. Giải các phương trình:

- $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 + (\sqrt{2} - 2)\sin x.\cos x$
- $2 \sin 2x - 3\sqrt{6}|\sin x + \cos x| + 8 = 0$

VI. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG KHÁC

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1) \sin^2 x = \sin^2 3x$$

$$2) \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$$

$$3) \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

$$4) \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$1) \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$$

$$2) \sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{8}$$

$$3) \cos^4 x + 2\sin^6 x = \cos 2x$$

$$4) \sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{1}{4\sin^2 2x} - 1 = 0$$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

$$1) 1 + 2\sin x \cdot \cos x = \sin x + 2\cos x$$

$$2) \sin x(\sin x - \cos x) - 1 = 0$$

$$3) \sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$$

$$4) \sin 2x = 1 + \sqrt{2} \cos x + \cos 2x$$

$$5) \sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$$

$$6) (2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$$

$$7) (\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x) = \sin^2 3x$$

$$8) \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos x + \cos 2x + \cos 3x)$$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

$$1) 2\cos x \cdot \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$2) 2\sin x \cdot \cos 2x + 1 + 2\cos 2x + \sin x = 0$$

$$3) 3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \cdot \sin 2x$$

$$4) \cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \cdot \cos 2x + 3\cos^2 x + 1$$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

$$1) \sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$$

$$2) \cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$$

$$3) \cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$$

$$4) \sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x$$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

$$1) \sin^3 x + \cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos x + \sin 3x$$

$$2) 1 + \sin 2x + 2\cos 3x(\sin x + \cos x) = 2\sin x + 2\cos 3x + \cos 2x$$