

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

secundaria



TOMO 2

En un país remoto dos ladrones, Pat y Pot, intentaron robar en el palacio del rey, siendo capturados y encerrados en dos mazmorras totalmente incomunicadas.

El rey (gran aficionado a las matemáticas), al cabo de unos días, les ofreció una posibilidad de salvación. Introdujo piedras en dos bolsas y les planteó la condición de conseguir la libertad: averiguar la cantidad de piedras que había en cada bolsa sabiendo que en cada una había más de una, admitiendo una sola respuesta.

A Pot le dio, como pista, el producto de las dos cantidades. Al momento, Pot dio la respuesta correcta y salió libre.

A Pat le desveló la suma de las dos cantidades: 15. Caviló y caviló Pat durante un tiempo sin dar con una solución adecuada hasta que el rey, compadecido, le dijo que Pot había resuelto el problema inmediatamente. Al saber esto, Pat razonó y dio la respuesta correcta... y también consiguió la libertad.

¿Cuántas piedras había en cada bolsa?



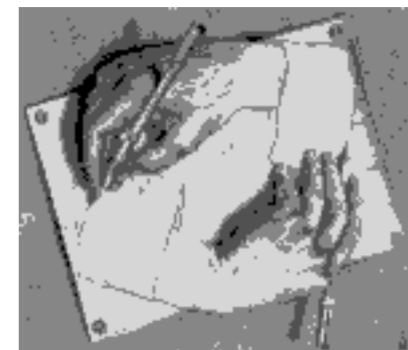
SOLUCIÓN

Como Pot resolvió inmediatamente el problema, el producto de ambas cantidades debía ser el de dos números primos. Por lo que Pat, al recibir la última información del rey, pensó en qué par de números primos sumarían 15... y dio rápidamente con la solución:

Las bolsas tenían 2 y 13 piedras

Se define un número como autobiográfico si su primera cifra (empezando por la izquierda) indica el número de ceros que tiene el número, su segunda cifra, el número de unos, su tercera cifra el número de doses, y así sucesivamente.

¿Cuál es el número autobiográfico más pequeño?



SOLUCIÓN

Probando, probando,... y usando la lógica fundamentalmente, puedes obtener que

el número autobiográfico más pequeño es 1210

PostData.- Los demás números autobiográficos son:

2020
21200
3211000
42101000
521001000
6210001000

y, parece ser, que no hay más... ¿?

¿Por qué número, distinto de 1, hay que dividir a 313, 364, 449 y 670 para que quede siempre el mismo resto?



SOLUCIÓN

Si el número buscado α da el mismo resto al dividir a los cuatro números citados, se cumplirá que

$$313 = \alpha x c_1 + r$$

$$364 = \alpha x c_2 + r$$

$$449 = \alpha x c_3 + r$$

$$670 = \alpha x c_4 + r$$

y α dividirá exactamente a $364 - 313 = 51$ y a $670 - 449 = 221$. Entonces, como $51 = 3 \times 17$ y $221 = 13 \times 17$, el número buscado es $\alpha = \text{MCD}(51, 221)$

el 17

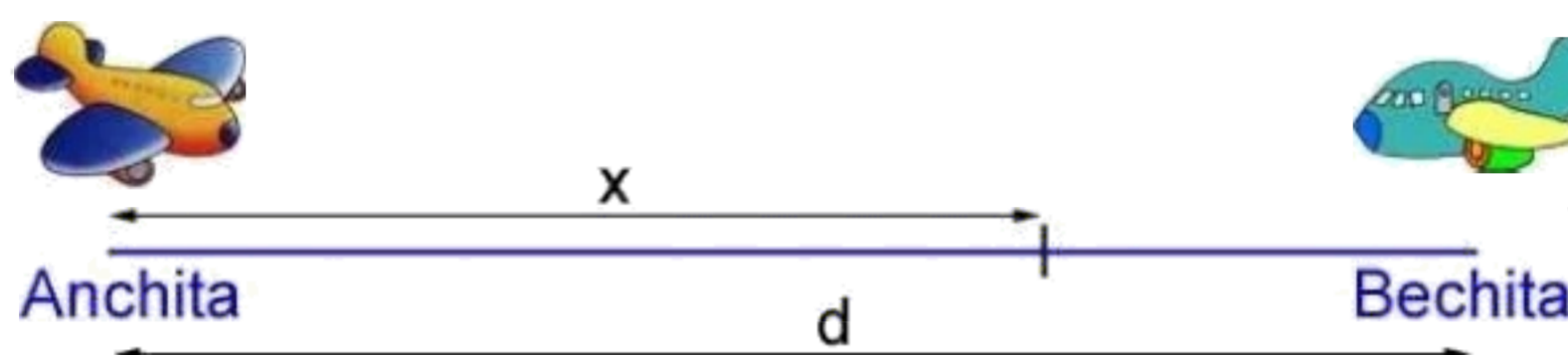
Un avión parte desde Anchita hacia Bechita. En el mismo instante otro parte con destino inverso y los dos hacen el mismo recorrido.

Cuando se cruzan, el que va desde Anchita hacia Bechita ha recorrido 100 km más que el otro y, desde ese momento, un avión tarda 8 minutos en llegar hasta Bechita mientras que el otro tarda 32 minutos en llegar hasta Anchita.

¿Qué distancia hay entre Anchita y Bechita?



SOLUCIÓN



Llamamos x a la distancia de Anchita al punto de encuentro de los aviones y d a la distancia entre Anchita y Bechita. Sea, también, t el tiempo transcurrido, en minutos, desde que empiezan sus recorridos hasta que se cruzan.

Teniendo en cuenta de que las velocidades de ambos aviones son constantes, $\frac{x}{t} = \frac{d-x}{8}$ y

$$\frac{d-x}{t} = \frac{x}{32} \Rightarrow t = \frac{8x}{d-x} = \frac{32 \times (d-x)}{x} \Rightarrow \left(\frac{x}{d-x} \right)^2 = \frac{32}{8} = 4 \Rightarrow \frac{x}{d-x} = 2 \Rightarrow x = 2d - 2x \Rightarrow 3x = 2d \Rightarrow x = \frac{2}{3}d$$

$$\text{Según el enunciado, } x = 100 + (d-x) \Rightarrow d = 2x - 100 \Rightarrow d = 2 \times \frac{2}{3}d - 100 \Rightarrow 3d = 4d - 300 \Rightarrow d = 300$$

Entre Anchita y Bechita hay 300 kilómetros

Un cura se acerca a un templo con un ramillete de flores en la mano. Encuentra una bandeja mágica en la puerta del templo y, al colocar las flores, se multiplican por 2. Recoge todas, hace una ofrenda de un número determinado de flores y continúa.

Se acerca a un segundo templo y esta vez encuentra dos bandejas mágicas en la puerta. Coloca todas las flores que tiene en la primera y se multiplican también por dos. Luego recoge todas para depositarlas en la segunda bandeja, que también es mágica, y vuelve a duplicar el número de flores. Recoge todas, hace la misma ofrenda que hiciera antes, el mismo número de flores, y continúa.



Por fin llega a su destino, otro templo, donde encuentra esta vez tres bandejas mágicas. Repite la misma operación en cada una de ellas (se duplican en cada bandeja), recoge el resultado y ofrece el mismo número de flores (que en las anteriores ofrendas) en el altar. Cuando acaba, vuelve a su parroquia con una sola en la mano.

¿Cuál es la mínima cantidad de flores que tenía al principio?, ¿qué ofrenda hacía en cada templo?

SOLUCIÓN

Llamamos n al número inicial de flores y a al número de flores que, permanentemente, dejaba como ofrenda.

En el primer templo se duplicaron las flores y dejó la ofrenda. Al salir, por tanto, tenía $2n - a$ flores.

Llegó al segundo templo y, al fin, cuadruplicó el número de flores y hace la ofrenda. Salió, por tanto, con $4 \times (2n - a) - a = 8n - 5a$ flores.

En el tercer templo repitió tres veces la duplicación de las flores que llevaba y dejó la ofrenda. Se fue con $8 \times (8n - 5a) - a = 64n - 41a$ flores, que resultó ser una única flor.

$$\text{Por tanto, } 64n - 41a = 1 \Rightarrow a = \frac{64n-1}{41} = n + \frac{23n-1}{41}$$

$$\text{Hacemos } x = \frac{23n-1}{41} \Rightarrow n = \frac{41x+1}{23} \Rightarrow n = x + \frac{18x+1}{23}; y = \frac{18x+1}{23} \Rightarrow x = \frac{23y-1}{18} = y + \frac{5y-1}{18};$$

$$z = \frac{5y-1}{18} \Rightarrow y = \frac{18z+1}{5} = 3z + \frac{3z+1}{5}; w = \frac{3z+1}{5} \Rightarrow z = \frac{5w-1}{3} = w + \frac{2w-1}{3}$$

Como todos los valores deben ser enteros haciendo $w = 2 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow y = 11 \Rightarrow x = 14 \Rightarrow n = 25 \Rightarrow a = 39$, por lo que

**El cura llevaba, inicialmente, 25 flores
y siempre hacía una ofrenda de 39 flores**

Halla dos números de tres cifras cuyo producto sea

555555

SOLUCIÓN

Factorizamos el número y resulta que $555555 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$

La única manera de agrupar estos factores para obtener dos números de tres cifras es $3 \times 7 \times 37 = 777$ y $5 \times 11 \times 13 = 715$. Por lo tanto,

$$\mathbf{555555 = 715 \times 777}$$

Joaquín y Enrique son dos vecinos que no se llevan muy bien. Tienen dos fincas pegadas y, en su afán de molestar al otro, Joaquín compró 8 postes y doscientos cuarenta metros de alambre de espinos. Colocó los postes a distancias iguales y el alambre dando tres vueltas alrededor de su finca, perfectamente cuadrada, sin dejar ninguna puerta.



Enrique, más avisado, esperó a que Joaquín terminase su obra. Compró, entonces, nueve postes y alambre. Colocó los postes a la misma distancia que los colocados por Joaquín y rodeó con tres vueltas de alambre su finca, también cuadrada, sin dejar, tampoco, ninguna puerta.

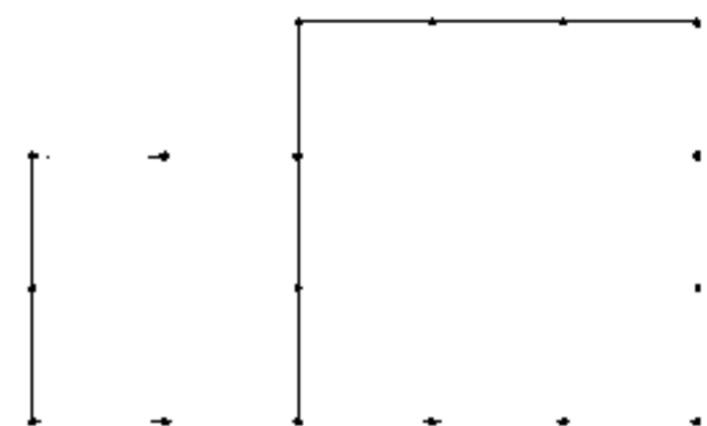
¿Cuáles son las dimensiones del terreno de Enrique?, ¿cuántos metros de alambre compró Enrique para completar su faena?

SOLUCIÓN

Con **240** metros de alambre, si Joaquín le dio tres vueltas al terreno, cuadrado, obtenemos $240/3 = 80$ metros por vuelta, $80/4 = 20$ metros por lado.

Al poner ocho postes hay **8** unidades de medida (distancia entre los postes), y esa unidad vale $80/8 = 10$ metros. [Véase la figura]

En resumen, Joaquín tenía un terreno cuadrado de **20** metros de lado con una distancia entre postes de **10** metros.



Enrique aprovechó un lateral del terreno de Joaquín (**3** postes) y, con **9** postes más, delimitó su terreno, también cuadrado. Esto hacen **12** postes, **12** unidades de medida con **3** unidades por lado: **30** metros.

Además, tuvo que alambrear **10** unidades (dos comunes ya las tenía alambradas Joaquín) por partida triple, por lo que necesitó $10 \times 10 \times 3 = 300$ metros de alambre.

**Enrique compró 300 metros de alambre
para completar el alambrado de su
terreno cuadrado, de 900 metros cuadrados**

El director de una empresa tiene la duda de a quién ascender, pues se acaba de jubilar el jefe de un departamento.

Tiene tres candidatas a las que convoca y les dice:

- Tengo que ascender a una de vosotras y, como quiero ser imparcial, quien sea la primera en contestarme esta pregunta será ascendida: ¿cuál es la suma de vuestras edades, sabiendo que el producto es 63700?

Como la edad es un tema tabú, las mujeres no tienen ni idea de cuál es la edad de las demás. Lo único que saben es que tienen entre 16 y 65 años, edades en las que se puede trabajar.

Al día siguiente, el jefe las reúne para desayunar y se entabla esta conversación:

- ¿Alguna sabe ya cuál es la suma de vuestras edades? – empieza el director
- Tras pensarlo toda la noche creo que es imposible – dice una
- Nos hacen falta más datos – añade la segunda
- La próxima vez que quieras ascendernos preguntanos algo que no sea imposible – apostilla la última
- Bueno, pensadlo un poco más y ya me diréis – contesta el director

A los diez minutos, una de ellas se presenta ante él y le dice:

- ¡Ya tengo la suma!

El director escucha su razonamiento y la solución del problema planteado, otorgándole el puesto tan deseado.

¿Cuánto vale la suma de las tres edades?



SOLUCIÓN

Factorizando 63700 obtenemos que $63700 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 13$

Con las limitaciones para las edades sólo podemos obtener estas combinaciones:

20 49 65

25 49 52

26 49 50

28 35 65

35 35 52

Si tenemos en cuenta que cada una de ellas sabe su edad pero no la de las demás, la imposibilidad de conocer la suma se debe a que su edad está en más de una combinación por lo que las edades solo pueden ser **35, 49, 52 o 65** años.

Al reflexionar sobre la conversación en el desayuno, la avisgada ganadora comprende que la única solución es la suma de las edades de la combinación que tenga tres de las cuatro edades válidas: **52, 35 y 35**

Por eso,

La suma de las edades es 122

Se define una nueva operación de 'suma' entre cifras de acuerdo con los ejemplos que se ven:

$$\begin{array}{l} 5+3= 28 \\ 9+1= 810 \\ 8+6= 214 \\ 5+4= 19 \\ 7+3= ? \end{array}$$

¿Cuál es el resultado de la última operación?

SOLUCIÓN

La 'suma' se construye escribiendo el valor absoluto de la diferencia entre ambas cifras seguido del valor de su suma tradicional.

En consecuencia, el valor de la 'suma' es,

410

Resuelve la ecuación

$$x^{x^{x^{x^{\dots}}}} = 2$$

SOLUCIÓN

Aplicando logaritmos, $\ln x^{x^{x^{x^{\dots}}}} = \ln 2 \Rightarrow x^{x^{x^{x^{\dots}}}} \cdot \ln x = \ln 2 \Rightarrow 2 \cdot \ln x = \ln 2 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \Rightarrow \ln x = \ln \sqrt{2}$. luego

$$x = \sqrt{2}$$

El abuelo de Juan (un señor que ya cumplió los 70 pero que aún no es octogenario) y la madre de Laura (que es cuarentona) viven en la misma calle, en la acera de los pares y en números contiguos.

Laura dice a Juan: "el producto de la edad de mi madre por el número del portal de la casa en que vive es igual al producto de la edad de tu abuelo por el número de su portal".

Calcula las edades de ambos y el número de las casas en que viven.



SOLUCIÓN

Vamos a considerar $\overline{7x}$ la edad del abuelo de Juan y $4y$ la edad de la madre de Laura, siendo x e y dos cifras del sistema decimal.

Si n , número par, es el portal del abuelo de Juan y $n + 2$ el portal de la madre de Laura se cumple que

$$\overline{4y} \times (n + 2) = \overline{7x} \times n \Rightarrow (40 + y) \times (n + 2) = (70 + x) \times n \Rightarrow \frac{n + 2}{n} = \frac{70 + x}{40 + y} < \frac{80}{40} = 2 \Rightarrow n + 2 < 2n \Rightarrow 2 < n$$

Además, $\overline{4y} \times (n + 2) = \frac{n + 2}{n} = \frac{70 + x}{40 + y} \geq \frac{70}{49} = \frac{10}{7} \Rightarrow 7n + 14 \geq 10n \Rightarrow 3n \leq 14 \Rightarrow n \leq 4$. En conclusión: como n es par, debe ser $n = 4$.

Por tanto, $6 \times (40 + y) = 4 \times (70 + x) \Rightarrow 240 + 6y = 280 + 4x \Rightarrow 6y - 4x = 40 \Rightarrow 3y - 2x = 20 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{3y - 20}{2} = \frac{y}{2} + y - 10$$

Como x e y (necesariamente par) son dos cifras decimales, la única solución posible es para $y = 8$ y $x = 2$.

Por eso,

el abuelo de Juan tiene 72 años y vive en el número 4 y la madre de Laura tiene 48 años y vive en el número 6

Calcula los valores de las cifras x, y, z en la expresión $yyy + xxx = yyyz$



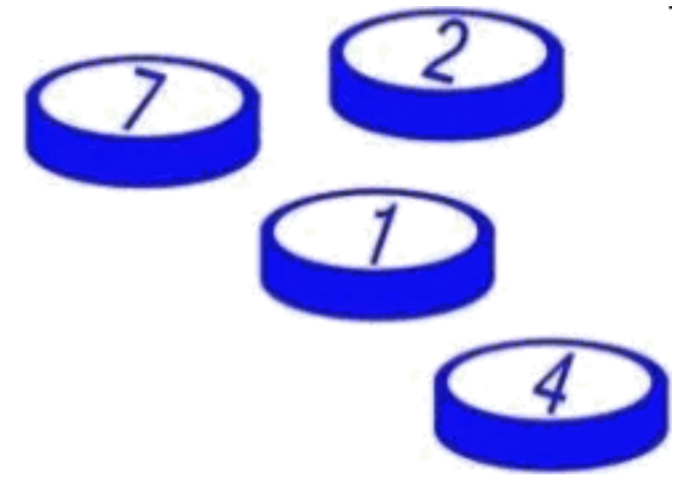
SOLUCIÓN

$y = 1$ por tener la suma una cifra más. Entonces, $111z - 111 = xxx$, luego $x = 9$ y $z = 0$ siendo la expresión $111 + 999 = 1110$

En resumen,

$$x=9, y = 1, z = 0$$

Lucía tiene cuatro fichas. Observa que sobre cada una de las ocho caras está indicado un número distinto, del 1 al 8. Ella lanza sus cuatro fichas una primera vez y ve aparecer 7, 2, 4 y 1, como está representado en el dibujo.



Lucía lanza sus fichas una segunda vez y obtiene 6, 4, 5 y 2. Después una tercera vez y obtiene 8, 2, 6 y 5. Finalmente, la cuarta vez, obtiene 7, 4, 3 y 5.

¿Cuáles son los números dibujados en cada ficha, uno sobre una cara y el otro sobre la opuesta?

SOLUCIÓN

Cada ficha tiene dos caras y cada una de las ocho caras contiene uno de los números del 1 al 8. Cada número visible sólo puede estar combinado con las cifras que no se ven en cada uno de los lanzamientos:

1º. 7 2 4 1

2º. 6 4 5 2

3º. 8 2 6 5

4º. 7 4 3 5

Razonando, a partir de los números que más veces salen, se deduce que el 2 (que aparece en los tres primeros lanzamientos) solo puede ir en la misma ficha que el 3.

Observando el segundo y el tercer lanzamiento, el 4 y el 8 deben estar en la misma ficha.

Y con los cuatro números que quedan y los lanzamientos, el 7 solo puede ir con el 6 en la ficha y el 1 con el 5.

Se concluye que

las fichas son (cara y envés) 1-5, 2-3, 4-8. 6-7

Halla los dígitos A, B, C y D tales que AA BAB BACD y AAAC sean números primos.



SOLUCIÓN

Según los números planteados, las cifras pedidas deben ser todas impares, no nulas y distintas de 5 por lo que sólo queda la posibilidad de que sean **1, 3, 7 y 9**.

Como **AA** es primo, necesariamente **A = 1**. En caso contrario sería múltiplo de **11**.

717 es múltiplo de **3**, por lo que **B** solo puede ser **3** o **9**. En ambos casos, **BAB** es primo.

También, considerando que **AAAC** es primo, **C = 7**, pues en los demás casos (**1111, 1113, 1119**) es compuesto al ser múltiplo de **3**.

Si **BACD = B17D** es primo y **B** es **3** o **9**, **D** no puede ser ni **1** ni **7** (los números resultantes serían todos múltiplos de **3**), por lo que solo puede ser **3** o **9**.

Hay, entonces, cuatro posibles números que pueden ser **BACD**: **3173, 3179, 9173** y **9179**.

Ahora bien, **3173 = 19 x 167**, **3179 = 11 x 289** y **9179 = 67 x 137** y **9173** es primo.

Por tanto,

$$\mathbf{A = 1, B = 9, C = 7, D = 3}$$

Un mono tenía una bolsa con bastantes cacahuetes y, cada mañana, su dueño le añadía 100 cacahuetes exactamente en la bolsa. Luego, durante el día, el mono se comía la mitad de los cacahuetes que encontraba en el saco y dejaba la otra mitad.



Una noche, después de muchos años comportándose así, el dueño del mono contó el número de cacahuetes que el mono había ahorrado en la bolsa.
¿Cuántos, aproximadamente, había?

SOLUCIÓN

Suponemos n el número inicial de cacahuetes. Al final del primer día, el mono conservaba $n_1 = \frac{n+100}{2}$.

Al acabar el segundo día, el mono tenía $n_2 = \frac{n_1+100}{2} = \frac{\frac{n+100}{2}+100}{2} = \frac{n+300}{4} = \frac{n+3 \times 100}{2^2} =$

$= \frac{n+(2^2-1) \times 100}{2^2}$. Al finalizar el tercer día, $n_3 = \frac{n_2+100}{2} = \frac{\frac{n+300}{4}+100}{2} = \frac{n+700}{8} = \frac{n+7 \times 100}{2^3} =$
 $= \frac{n+(2^3-1) \times 100}{2^3}$

Al fin del cuarto día, $n_4 = \frac{n_3+100}{2} = \frac{\frac{n+700}{8}+100}{2} = \frac{n+1500}{16} = \frac{n+15 \times 100}{2^4} = \frac{n+(2^4-1) \times 100}{2^4}$

Siguiendo la pauta, al terminar el día x tendía $n_x = \frac{n+(2^x-1) \times 100}{2^x}$

Suponiendo que son "muchos" (x) días (las potencias de 2 hacen que n y el valor 100, a los pocos días, sean cantidades sean mucho menores que aquellas), el número aproximado que contó el hombre es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} n_x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+(2^x-1) \times 100}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n}{2^x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \times 100}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100}{2^x} = 0 + 100 - 0 = 100$$

Por lo que

el dueño del mono contó 100 cacahuetes, más o menos

Un abuelo ha cumplido 91 años y esta edad es la diferencia entre los cuadrados del número de nietos y del de las nietas que tiene. En total, son menos de veinte.

¿Cuántos nietos tiene en total?, ¿cuántas son mujeres?



SOLUCIÓN

Suponemos que x es el número de nietos e y el número de nietas. Según el enunciado, $x^2 - y^2 = 91$.

Como estamos trabajando con números naturales. $x^2 - y^2 = (x - y) \times (x + y) = 91 = 1 \times 91 = 7 \times 13$

Por lo que tenemos dos posibilidades:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = 91 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 46; y = 45$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x - y = 7 \\ x + y = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 10; y = 3$$

Rechazando, por las condiciones del problema, la primera posibilidad, se concluye que

el abuelo tiene 13 nietos, de las que 3 son mujeres

Siete granjeros tienen en total 2879 gallinas en sus respectivas granjas. No hay dos con la misma cantidad.

Si dividimos la cantidad de gallinas de una cualquiera de esas granjas por la cantidad de gallinas de cualquier otra granja menor el resultado es siempre un número entero.

¿Cuántas gallinas hay en cada una de las granjas?



SOLUCIÓN

Sean $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7$ el número de gallinas de cada granja, ordenados de mayor a menor. Como todos son múltiplos del último, se cumple que $n_i = m_i \times n_7, \forall i = 1, \dots, 6$

Por tanto, $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + 1) \times n_7 = 2879$

Pero 2879 es un número primo, por lo que $n_7 = 1$ y $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 2878$

Siguiendo el razonamiento, todos los números desconocidos son múltiplos de n_6 : $n_i = p_i \times n_6, \forall i = 1, \dots, 5$

Entonces, $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + 1) \times n_6 = 2878 = 2 \times 1439$, única factorización posible. Por tanto, $n_6 = 2$ y $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 2876$

Igualmente, $n_i = q_i \times n_5, \forall i = 1, \dots, 4 \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = (q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + 1) \times n_5 = 2876 = 4 \times 719$, luego $n_5 = 4$ y $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2872$

$n_i = r_i \times n_4, \forall i = 1, 2, 3 \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = (r_1 + r_2 + r_3 + 1) \times n_4 = 2872 = 8 \times 359 \Rightarrow n_4 = 8$ y $n_1 + n_2 + n_3 = 2864$

$n_i = r_i \times n_3, \forall i = 1, 2 \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = (r_1 + r_2 + 1) \times n_3 = 2864 = 16 \times 179 \Rightarrow n_3 = 16$ y $n_1 + n_2 = 2848$

Y, por fin, $n_1 = s \times n_2 \Rightarrow n_1 + n_2 = (s + 1) \times n_2 = 2848 = 32 \times 89 \Rightarrow n_2 = 32$ y $n_1 = 2816$

En resumen,

las granjas poseen 1, 2, 4, 8, 16, 32 y 2816 gallinas

En un club de baile estaban siete parejas ensayando para los próximos campeonatos. Cada uno de los bailarines tenía su número en la espalda. Los números eran todos diferentes e iban de 1 a 14.

El primer baile deparó un hecho curioso: en cada pareja, la suma de los dos números era un cuadrado perfecto. Para el segundo baile hubo un cambio de parejas y se dio una nueva coincidencia: las tres parejas de la derecha tenían una suma que era un mismo número primo y las tres de la izquierda también sumaban cada una un número primo, el mismo y distinto del anterior. El par que danzaba en el centro tenía una suma diferente de las anteriores y también determinaba otro primo.



Isabel tenía el número 1 en la espalda. ¿Cuáles son los números de las otras seis bailarinas?

SOLUCIÓN

Hacemos unas tablas de doble entrada para ver las posibilidades en cada caso:

Parejas que suman un cuadrado perfecto razonable en el contexto (4-9-16-25)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1			x					x						
2							x							x
3						x							x	
4					x							x		
5											x			
6										x				
7									x					
8														
9														
10														
11														x
12													x	
13														
14														

Del cuadro se deduce que los pares (1,8), (7,9), (6,10) son tres de las parejas.

De ahí se sigue entonces que también son parejas (2,14), (3, 13), (4,12) y (5,11)

Parejas que forman números primos razonables en el contexto (3-5-7-11-13-17-19-23)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1		x		x		x				x		x		
2			x		x				x		x			
3				x				x		x				x
4							x		x				x	
5						x		x				x		x
6							x				x		x	
7										x		x		
8									x		x			
9										x				x
10													x	
11												x		
12														
13														
14														

Como la suma de todos los números es 105, se cumple $3 \times \text{primo_izquierda} + \text{primo_central} + 3 \times \text{primo_derecha} = 105$, por lo que el **primo_central** debe ser múltiplo de 3, cosa que solo sucede con **primo_central = 3**.

Entonces, la pareja central debe ser (1,2).

De ahí, $3 \times \text{primo_izquierda} + 3 \times \text{primo_derecha} = 102$ y ambos distintos.

Por tanto, **primo_izquierda + primo_derecha = 34**, y esto solo se produce cuando los primos son 11 y 23

Entonces, pueden hacerse los siguientes pares: (9,14), (10,13) y (11,12), que suman 23, y (3,8), (4,7) y (5,6) que suman 11.

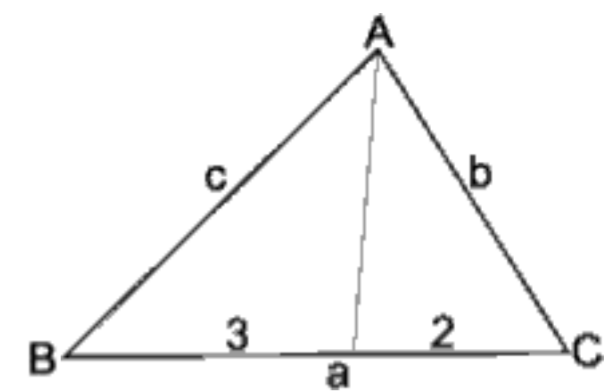
Analizando ambos resultados, se puede esperar una 'reacción' en cadena: si Isabel es la dama 1, 8 es hombre \Rightarrow 3 es dama \Rightarrow 13 es hombre \Rightarrow 10 es dama \Rightarrow 6 es hombre \Rightarrow 5 es dama \Rightarrow 11 es hombre \Rightarrow 12 es dama \Rightarrow 4 es hombre \Rightarrow 7 es dama \Rightarrow 9 es hombre \Rightarrow 14 es dama \Rightarrow 2 es hombre

En conclusión,

las bailarinas tenían los números 1, 3, 5, 7, 10, 12 y 14

El perímetro del triángulo ABC suma 15. La bisectriz del ángulo A divide al lado opuesto BC en 2 y 3.

¿Cuánto mide cada lado?



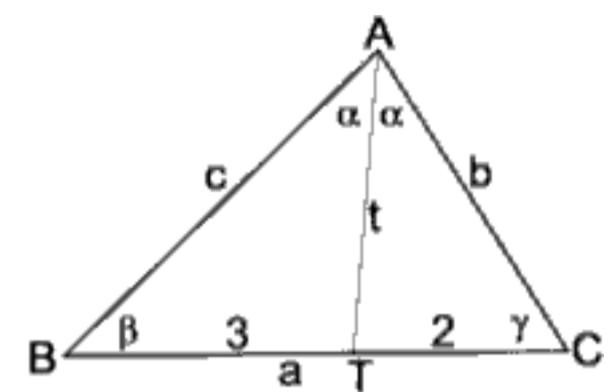
SOLUCIÓN

Evidentemente, si el perímetro es 15, y $a = 3 + 2 = 5 \Rightarrow b + c = 10$

Consideramos ahora los tres triángulos (ABT , ATC , ABC) que se forman al trazar la bisectriz t y aplicamos, en ellos, el *teorema de los senos*:

En ABT , $\frac{t}{\sin \beta} = \frac{3}{\sin \alpha}$, y en ATC , $\frac{t}{\sin \gamma} = \frac{2}{\sin \alpha}$, por lo que

$$t \times \sin \alpha = 3 \times \sin \beta = 2 \times \sin \gamma \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{2}{3}$$



Por último, en ABC , $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3} \times c$

Sustituyendo ahora en la expresión inicial, $b + c = 10 \Rightarrow \frac{2}{3} \times c + c = 10 \Rightarrow \frac{5}{3} \times c = 10 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow b = \frac{2}{3} \times c = 4$

En conclusión

los lados del triángulo miden 5, 4 y 6

¡Alguien está tratando de matar a uno de los Caballeros de la Mesa Redonda!

Seis caballeros se encuentran sentados a la mesa; cada uno sostiene una copa con vino y una de las seis copas está envenenada.

Sir Galahad está sentado entre Sir Lancelot y el Rey Arturo. El Caballero Negro está dos lugares a la derecha del Rey Arturo. Sir Lancelot se encuentra sentado en el sitio opuesto al de Sir Kay. La copa envenenada está dos lugares a la izquierda de Sir Gawain.



¿Quién sostiene la copa envenenada?

SOLUCIÓN

Según las condiciones que se dan en el enunciado, se pueden asignar rápidamente los puestos en la mesa. En la figura se muestra como están colocados.

Por lo tanto,

el caballero que sostiene la copa envenenada es Sir Kay

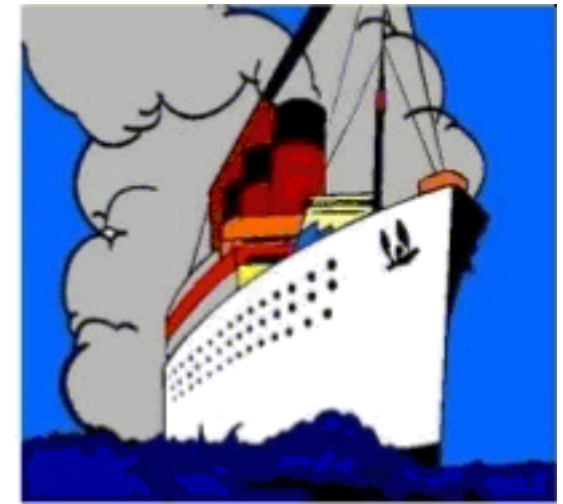


El capitán del barco recorre su nave acompañado por su hijo. Al pasar por un camarote le dice al hijo: "En este camarote viajan la señora García y sus dos hijas. Al multiplicar las edades de las tres resulta 2450. Si las sumamos resulta 4 veces tu edad. ¿Qué edades tienen las tres mujeres?"

El hijo piensa un momento y le responde: "Necesito saber algo más"

Su padre, el capitán, le dice: "Debes saber que yo soy mayor que la señora García", con lo que el hijo sabe ya la edades.

¿Qué edad tienen las cinco personas que aparecen en la historia?



SOLUCIÓN

Descomponiendo factorialmente se obtiene $2450 = 2 \times 5^2 \times 7^2$, por lo que las edades aceptables y razonables para las mujeres son:

- 2, 25, 49. La suma es $2 + 25 + 49 = 76$, múltiplo de 4, y da $76 \div 4 = 19$ años para el hijo del capitán.
- 5, 10, 49. La suma es $5 + 10 + 49 = 64$, múltiplo de 4, y da $64 \div 4 = 16$ años para el hijo del capitán.
- 5, 14, 35. La suma es $5 + 14 + 35 = 54$, que no es múltiplo de 4
- 7, 7, 50. La suma es $7 + 7 + 50 = 64$, múltiplo de 4, y da $64 \div 4 = 16$ años para el hijo del capitán.
- 7, 10, 35. La suma es $7 + 10 + 35 = 52$, múltiplo de 4, y da $52 \div 4 = 13$ años para el hijo del capitán.
- 7, 14, 25. La suma es $7 + 14 + 25 = 46$, que no es múltiplo de 4

De los seis casos razonables, cuatro cumplen las condiciones del problema (la suma es múltiplo de 4) y dos de ellos obligan al hijo del capitán a dudar sobre la respuesta pues en ambos casos su edad (igual en ellos: 16) dará lugar a dicha duda.

En conclusión, las edades de las señoras son 5, 10, 49 o 7, 7, 50

La respuesta del capitán a su hijo desecha la posibilidad de que tenga 49 años o menos y de que tenga más de 50, pues en este caso su hijo no podría discriminar. Por lo tanto, el capitán debe tener, exactamente, 50 años y la señora 49 años.

En resumen,

La señora tiene 49 años, las hijas 5 y 10 años, el capitán tiene 50 años y su hijo 16 años

Con todos los dígitos del sistema decimal (del 0 al 9), apareciendo cada uno una sola vez y en su orden numérico, y las cuatro operaciones básicas de la aritmética escribe una operación cuyo resultado sea 100, como

$$(0+1+2+3+4+5) \times 6 - 7 + 8 + 9 = 100$$

$$0 + 1 + 2 \times 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$$

$$0 \times 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 7 + 89 = 100$$

SOLUCIÓN

Hay, además de las mostradas, muchas posibilidades:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 = 100$$

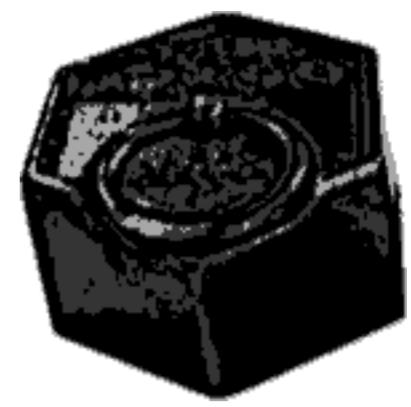
$$0 + 1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100$$

.....

Un mercader tenía una pesa de 40 kg (para su uso en una típica balanza) que se le cayó, rompiéndose en cuatro pedazos cuyos pesos respectivos eran números exactos de kilos.

Por medio de esos pedazos podía pesar cualquier objeto que resultara un número exacto de kilos comprendido entre 1 y 40, ambos inclusive.

¿Cuales eran los pesos de cada uno de los cuatro trozos?



SOLUCIÓN

Vamos a considerar siempre que las pesadas y los pesos son valores enteros.

Si tenemos un conjunto de pesas que permiten pesar de 1 a n kilos, al añadir un nuevo peso de $2n+1$ kilos podremos pesar de 1 hasta $3n+1$ kilos, pues para las pesadas superiores a n podremos añadir al nuevo peso cualquiera de los primeros.

Entonces, como la máxima pesada debe ser de 40 kg, $3n+1=40 \Rightarrow n=13$, luego el trozo de mayor peso es de $2n+1=2 \times 13+1=27$ kg

Iterando el proceso $3p+1=13 \Rightarrow p=4$, por lo que otro trozo será de $2p+1=2 \times 4+1=9$ kg

Y más: $3q+1=4 \Rightarrow q=1$, con lo que el tercer trozo será de $2q+1=2 \times 1+1=3$ kg y, evidentemente, el último será de $q=1$ kg

Por tanto,

los pesos de los trozos son de 1, 3, 9 y 27 kg

Reconstruye el producto

$$ABCDE \times 4 = EDCBA$$

Sustituyendo cada letra por un dígito y sabiendo que a letras distintas les corresponden dígitos distintos.

SOLUCIÓN

Como el número de cifras del producto es igual al del factor desconocido, **A** debe ser **1** o **2**... y **A** no puede ser **1** porque es la última cifra de un número que tiene al **4** como factor, por lo que **A = 2**.

Por lo tanto, **E** es **8** o **9**... y como **E x 4** acaba en **2**, **E = 8**. En principio, pues:

De lo anterior se deduce que **B** debe ser **0** o **1**. Se debe descartar el **0** porque **D x 4** no puede resultar un valor acabado en **7**, ya que se arrastra y se añade **3** del producto **4 x 8**. En conclusión **B = 1** y entonces, necesariamente, **D = 7** y **C = 9**:

$$\begin{array}{r} 2\ B\ C\ D\ 8 \\ \times 4 \\ \hline 8\ D\ C\ B\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 9\ 7\ 8 \\ \times 4 \\ \hline 8\ 7\ 9\ 1\ 2 \end{array}$$

La edad de una persona al morir era $\frac{1}{31}$ del año de su nacimiento. ¿Qué edad tenía en 1921?

SOLUCIÓN

Designamos n como el año de su nacimiento y m como el año de su muerte.

La condición del problema establece que $\frac{1}{31}n = m - n$

Al ser 31 un número primo, n debe ser múltiplo de 31 y relativamente próximo a 1921 pues en este año vivía esa persona.

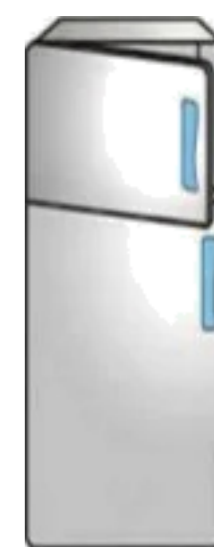
Como $\frac{1921}{31} = 61, \dots$, hallamos los múltiplos próximos a ese año para las posibilidades del año de nacimiento:

- $31 \times 59 = 1829 \rightarrow \frac{1}{31}1829 = 59$, por lo que hubiese muerto en $1829 + 59 = 1888$. Imposible: había muerto antes de 1921
- $31 \times 60 = 1860 \rightarrow \frac{1}{31}1860 = 60$, por lo que hubiese muerto en $1860 + 60 = 1920$. Imposible: había muerto antes de 1921
- $31 \times 61 = 1891 \rightarrow \frac{1}{31}1891 = 61$, por lo que hubiese muerto en $1891 + 61 = 1952$ y tendría, en 1921, $1921 - 1891 = 30$ años
- $31 \times 62 = 1922 \rightarrow$ Imposible: aún no vivía en 1921

En conclusión,

en 1921 tenía 30 años





El gerente de una empresa dedicada a la comercialización de frigoríficos estaba revisando las ventas habidas, de un determinado modelo, en dos sucursales.

En la sucursal A se habían ingresado 393427 euros, y en la sucursal B 360079 euros.

Le indicó a su secretaria que mirase el precio por unidad para averiguar los frigoríficos vendidos en cada sucursal.

Ella hizo unos cálculos rápidos y dijo “no hace falta”. Acto seguido dio el número de ventas de cada sucursal.

¿Cuántos frigoríficos se vendieron en cada sucursal?

SOLUCIÓN

La solución pasa por averiguar el precio cada frigorífico y, para ello, calculamos el máximo común divisor de los dos valores que se dan.

Lo hacemos por el algoritmo de Euclides:

	1	10	1	3	1	16
393427	360079	33348	26599	6749	6352	397
33348	26599	6749	6353	397	0	

Por tanto, $\text{MCD}(393427, 360079) = 397$

Como **397** es un número primo, éste será, necesariamente, el valor de cada unidad. Entonces, el número de ventas en cada sucursal se obtiene dividiendo cada ingreso por dicho precio:

Sucursal A: $393427 : 397 = 991$

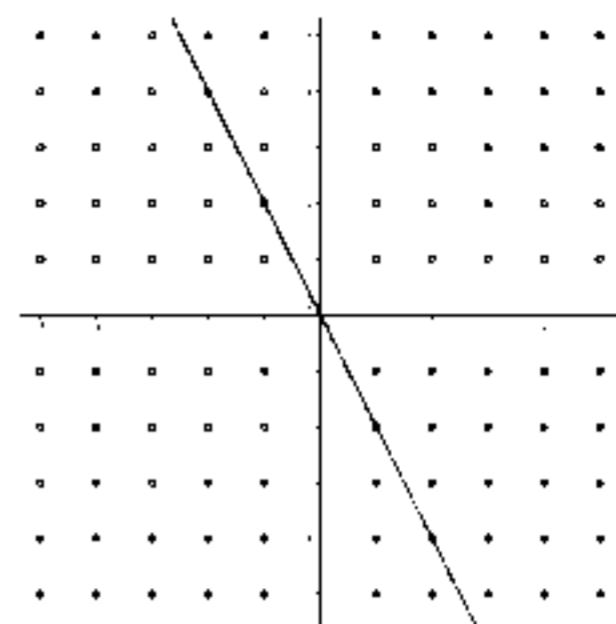
Sucursal B: $360079 : 397 = 907$

Podemos decir que

en la sucursal A se vendieron 991 frigoríficos y en la sucursal B se vendieron 907 frigoríficos

Consideremos, en el plano, un sistema de coordenadas cartesianas y sealamos todos los puntos determinados por coordenadas enteras.

Trazando una recta, al azar, que pase por el origen de coordenadas, ¿cuál es la probabilidad de que pase por alguno de esos puntos?



SOLUCIÓN

Para que la recta pase por uno de esos puntos, por ejemplo (a,b) siendo

a, b números enteros, su pendiente deberá ser un número racional $m = \frac{b}{a}$.

Pero la pendiente de una recta puede ser cualquier valor real por lo que, como el conjunto de los números reales tiene un orden de infinitud c ($= \aleph_1$?) mayor que el de los números racionales \aleph_0 ,

la probabilidad es cero

En un determinado instante, el reloj tiene las dos saetas formando el mismo ángulo con las 12. La que marca los minutos a la izquierda y la que marca las horas a la derecha.

¿Qué hora, exactamente, marca el reloj?



SOLUCIÓN

Llamamos x al número de minutos que señala el minuterero y, así, escribimos la igualdad

$$\frac{x}{60} = 12 - \frac{x}{5} \Rightarrow 5x = 3600 - 60x \Rightarrow 65x = 3600 \Rightarrow x = 55,38461538 \text{ minutos} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 55$ minutos 23,078 segundos

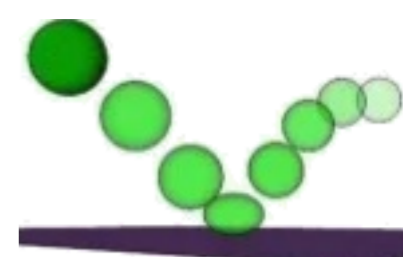
Por tanto,

son las 12 horas 55 minutos 23,078 segundos

Desde lo alto de un edificio de 20 metros de altura se deja caer una pelota de goma

Después de cada rebote contra el suelo, la pelota se eleva una décima parte de la altura alcanzada antes.

¿Cuántos metros ha recorrido la pelota, en su vaivén, hasta que se para?



SOLUCIÓN

El recorrido total de la pelota es

$$R = 20 + 2 \times \frac{20}{10} + 2 \times \frac{20}{100} + 2 \times \frac{20}{1000} + \dots = 20 \times \left(1 + \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \dots \right) = 20 \times \left(1 + 2 \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) \right)$$

El contenido del paréntesis interior es la suma de una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{10}$, menor que

la unidad, y cuyo primer término es $\frac{1}{10}$. Recordemos que, en esos casos, la suma vale $S = \frac{a}{1-r}$

$$\text{Por tanto, } R = 20 \times \left(1 + 2 \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) \right) = 20 \times \left(1 + 2 \times \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \right) = 20 \times \left(1 + 2 \times \frac{1}{9} \right) = 20 \times \frac{11}{9} = 24,44$$

En resumen,

La pelota recorre 24,44 metros

La isla Tiki-Taka está habitada por dos tribus: los tikis, que mienten siempre, y los takas, que siempre dicen la verdad.

Un explorador, al llegar a la isla, se encuentra con tres indígenas y les pregunta a qué tribu pertenecen.

El primero le contesta en voz tan baja que no llega a escuchar su respuesta. El segundo, señalando al primero, le aclara: “dice que es un taka”. El tercer indígena interpela al segundo: “¡eres un mentiroso!”.

¿De qué tribu es el último que habla?



SOLUCIÓN

El primer indígena le dirá, tanto si miente como si dice la verdad, que es taka, por lo que el segundo está diciendo la verdad y el tercero miente.

Concluyendo,

el último que habla es tiki

Compré, para Navidad, un décimo de lotería. El número empieza por 0 y le sigue un número de cuatro cifras.

Si la primera cifra de ese número de cuatro cifras la pongo en último lugar, el número que obtengo son los $\frac{3}{4}$ del número original más una unidad.

¿Qué número tiene mi décimo?



SOLUCIÓN

Tomamos el número con las cuatro cifras relevantes: \overline{abcd}

Según las condiciones, $\overline{bcda} = \frac{3}{4}\overline{abcd} + 1 \Rightarrow 4 \times \overline{bcda} = 3 \times \overline{abcd} + 4 \Rightarrow 4 \times (1000b + 100c + 10d + a) =$

$$= 3 \times (1000a + 100b + 10c + d) + 4 \Rightarrow 3700b + 370c + 37d = 2996a + 4 \Rightarrow 100b + 10c + d = \frac{4 \times (749a + 1)}{37}$$

Como 4 no es divisible por 37 deberá serlo $749a + 1$, siendo a un dígito. Entonces, haciendo

$$t = \frac{749a + 1}{37} = 20a + \frac{9a + 1}{37}; s = \frac{9a + 1}{37} \Rightarrow a = \frac{37s - 1}{9} = 4s + \frac{s - 1}{9}$$

Como a es un dígito, para $s = 1 \Rightarrow a = 4$, por lo que $\overline{bcd} = 100b + 10c + d = \frac{4 \times (749 \times 4 + 1)}{37} = 324$

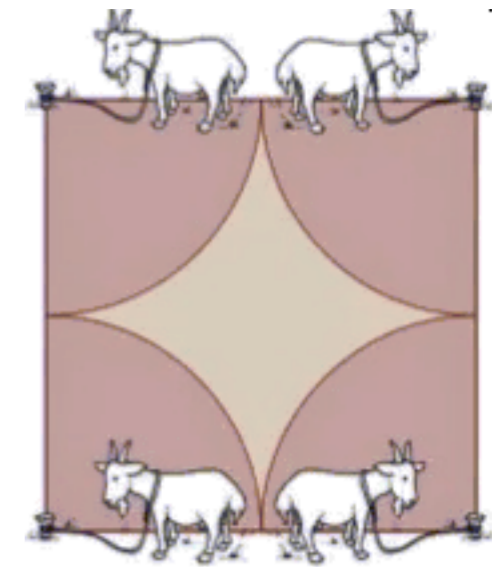
y el número del billete es

04324

En un prado cuadrado de 100 metros de lado había cuatro cabras. Cada una, atada a una esquina diferente del prado con una cuerda de 50 metros, comía cierta parte de la hierba del prado, quedando en el centro un trozo que ninguna de ellas alcanzaba.

El propietario, tras vender a tres de sus cabras, alargó la cuerda de la que quedaba en una de las esquinas de manera que el área sobre la que podía pastar era igual a la que abarcaban las cuatro anteriormente.

¿Qué longitud le dio el dueño del prado a la cuerda?



SOLUCIÓN

El área que cubren las cuatro cabras coincide con la de un círculo de 50 metros de radio, pues cada una abarca un cuadrante. Por lo tanto, el área total que comen es de $\pi \times 50^2$ metros cuadrados.

Si r es la longitud de la cuerda para la cabra que queda sola, el cuadrante que abarque debe tener esa

misma superficie, por lo que $\frac{\pi \times r^2}{4} = \pi \times 50^2 \Rightarrow r^2 = 50^2 \times 4 \Rightarrow r = 100$. Es decir,

la cuerda mide 100 metros

Halla tres números naturales consecutivos tales que cuando se forman todas las fracciones posibles, tomándolos de dos en dos, la suma de esas seis fracciones es un número natural.



SOLUCIÓN

Consideramos los números naturales consecutivos $x-1$, x , $x+1$ y construimos la suma propuesta:

$\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x}$. Sumando todas las fracciones queda

$$\frac{(x-1)^2(x+1) + x^2(x+1) + x(x-1)^2 + x(x+1)^2 + x^2(x-1) + (x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2x(x^2-1) + 2x^3 + x(2x^2+2)}{x(x-1)(x+1)}$$

Habiendo sumado, en el numerador, por parejas: primer con sexto términos, segundo con quinto y tercero con cuarto. Siguiendo la simplificación del numerador,

$$\frac{2x(x^2-1) + 2x^3 + x(2x^2+2)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2x^3 - 2x + 2x^3 + 2x^3 + 2x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{6x^3}{x(x^2-1)} = \frac{6x^2}{x^2-1}, \text{ número natural.}$$

Como x^2-1 nunca puede dividir a x^2 al diferenciarse en una unidad y $x > 1$, x^2-1 debe dividir a 6 y esto sucede únicamente para $x=2$ por lo que los números son

1, 2 y 3

A large red number 2 with blue gloves and shoes.

$n = -\log_2 \left(\log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}} \right)$ siendo n el número de raíces cuadradas encajadas, pues

$$-\log_2\left(\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}\right)=-\log_2\left(\log_22^{\frac{1}{2^n}}\right)=-\log_2\left(\frac{1}{2^n}\log_22\right)=-\log_2\frac{1}{2^n}=\log_22^n=n\times\log_22=n, \text{ por}$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$1 = 2 - \frac{2}{2}$$

$$2 = 2 + 2 - 2$$

$$3 = 2 + \frac{2}{2}$$

$$4 = 2 + \sqrt{2 \times 2}$$

$$5 = -\log_2 \left(\log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}} \right)$$

$$6 = 2 + 2 + 2$$

$$7 = -\log_2 \left(\log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}}} \right)$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

$$9 = -\log_2 \left(\log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}}} \right)$$

Una persona comentaba a otra, en la taberna del pueblo, que le habían dicho que un tesoro se hallaba escondido en una parcela cuadrada, de manera que trazando un círculo de 2 metros de radio desde una de las esquinas, otro círculo de 3 metros de radio desde una esquina contigua y, finalmente, un tercer círculo de 4 metros de radio desde una tercera esquina contigua a la anterior, la intersección de los tres círculos determinaba el punto exacto en el que se encontraba el tesoro.



En el pueblo todas las parcelas eran cuadradas, por lo que hubiera sido muy costoso encontrar la que contenía el tesoro.

Cavilando la persona que escuchó esto, determinó cuál debía ser la superficie de la parcela del tesoro.

¿Cuántos metros cuadrados tenía dicha superficie?

SOLUCIÓN

Ante todo, se debe considerar que los tres círculos se cortan en un solo punto. En la figura adjunta, tenemos un esquema de la situación.

E es el punto en donde se encuentra el tesoro, lugar de intersección de los tres círculos.

Llamamos p al lado de la parcela, $EH = x$ y $EF = y$

Entonces, trabajando con los triángulos rectángulos EGA , EHB y EFC ,

$$x^2 + (p - y)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$(p - x)^2 + y^2 = 16$$

Restando las dos primeras,

$$(p - y)^2 - y^2 = -5 \rightarrow p^2 - 2py = -5 \rightarrow y = \frac{p^2 + 5}{2p}$$

Restando las dos últimas,

$$(p - x)^2 - x^2 = 7 \rightarrow p^2 - 2px = 7 \rightarrow x = \frac{p^2 - 7}{2p}$$

Y, sustituyendo en la segunda,

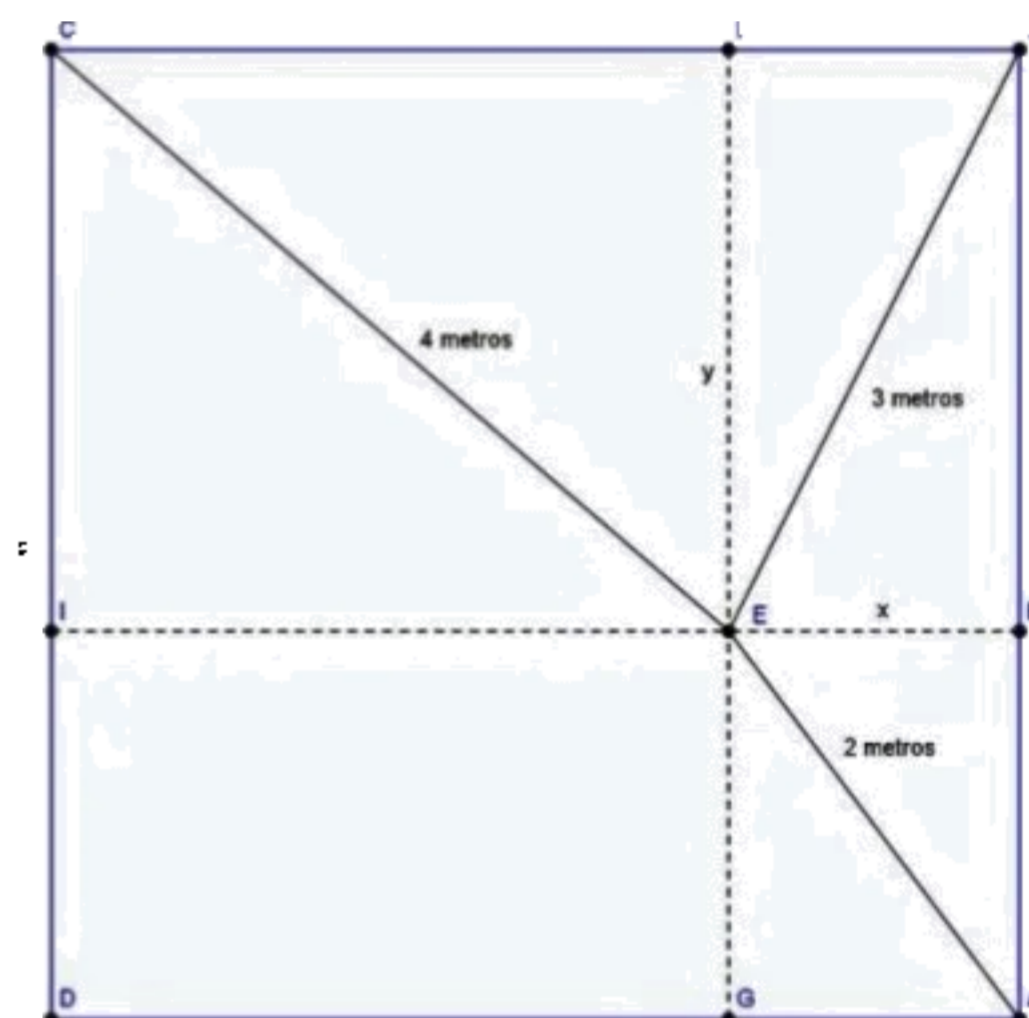
$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{p^2 - 7}{2p} \right)^2 + \left(\frac{p^2 + 5}{2p} \right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{p^4 + 10p^2 + 25 + p^4 - 14p^2 + 49}{4p^2} = 9 \Rightarrow 2p^4 - 40p^2 + 74 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^4 - 20p^2 + 37 = 0 \Rightarrow \text{Área} = p^2 = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 148}}{2} \rightarrow p^2 = 17,94 \text{ o } p^2 = 2,06$$

La última sería una solución no válida, pues el lado no alcanzaría los 2 metros y el tesoro estaría fuera de la parcela.

Por lo tanto,

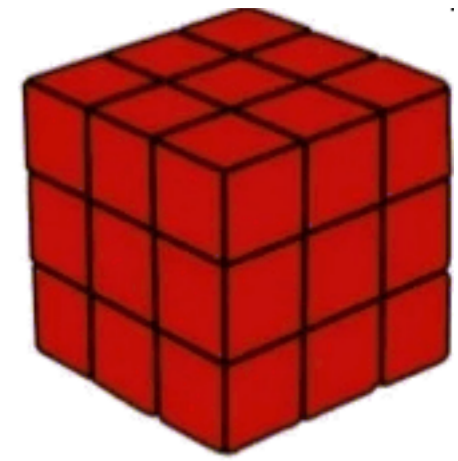
la superficie de la parcela es de 17,94 metros cuadrados



Un cubo tiene pintadas de rojo sus seis caras.

Lo dividimos en 27 cubitos iguales. La longitud de las aristas es, evidentemente, la tercera parte de las del cubo original.

¿Cuántos cubitos tendrán pintadas de rojo tres caras?, ¿cuántos tendrán dos solamente?, ¿cuántos una?, ¿cuántos ninguna?



SOLUCIÓN

Haciendo un ejercicio de visualización tendremos los 8 cubitos que ocupan los vértices del cubo grande con 3 caras pintadas de rojo.

Los que contienen el lugar central de las aristas del cubo grande serán 12, tantos como aristas tiene, y tendrán 2 caras pintadas de rojo.

Una cara pintada de rojo tendrán los cubitos que contengan la parte central de cada cara del cubo grande: son 6

Por último, el cubito que ocupa el centro del cubo no tendrá ninguna cara pintada de rojo.

Así habrá,

8 cubitos con 3 caras pintadas de rojo
12 cubitos con 2 caras pintadas de rojo
6 cubitos con 1 caras pintadas de rojo
1 cubito con ninguna cara pintada de rojo

Una compañía de transportes debe entregar, en un tiempo prefijado, un cargamento de material en un almacén y, en estos momentos, solo tiene un camión operativo de toda la flota que posee la compañía: hay dos averiados y el resto sin poder trabajar por diversos motivos.



Si tuviera todos los camiones disponibles, excepto los averiados, completaría la entrega en 8 días, uno más que los previstos si hubiera contado con toda la flota.

¿Cuántas semanas se retrasará usando el único camión útil?

SOLUCIÓN

Suponemos que d son los días que tarda un camión en hacer la entrega y x el número de camiones de la flota.

Con todos los camiones la entrega se haría en $\frac{d}{x} = 7$ días y, sin los averiados, en $\frac{d}{x-2} = 8$ días.

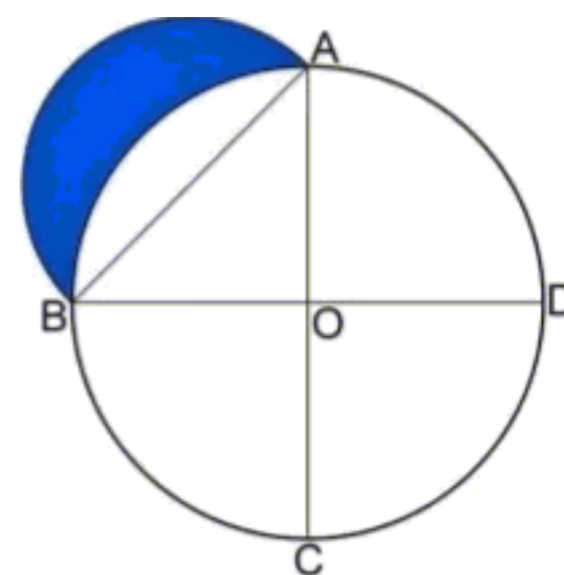
De ambas ecuaciones se deduce que $8 \times (x - 2) = 7x \Rightarrow x = 16$

Por tanto, $d = 7 \times 16$ días, luego tardará 16 semanas y

se retrasará 15 semanas en la entrega

En una circunferencia de 4 cm de radio se dibujan los diámetros AC y BD, perpendiculares entre sí.

Halla el área de la “luna” sombreada y limitada por la circunferencia y la semicircunferencia exterior a ella de diámetro AB



SOLUCIÓN

La longitud de la cuerda AB es $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ cm

Por tanto, el área del segmento circular limitado por la cuerda AB y la circunferencia es

$s = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{4 \cdot 4}{2} = 4\pi - 8$ cm², diferencia entre las áreas del cuadrante AOB y del triángulo rectángulo AOB

La superficie encerrada por la semicircunferencia dibujada, de radio $\frac{\overline{AB}}{2}$ es $S = \frac{\pi \left(\frac{4\sqrt{2}}{2} \right)^2}{2} = 4\pi$ cm²

De ahí, la superficie pedida es $S - s = 4\pi - (4\pi - 8) = 8$ cm²

Es decir,

la superficie de la “luna” sombreada es de 8 cm²

De hecho, para cualquier estructura similar de a partir de una circunferencia de radio r , la superficie de la “luna” es siempre igual a la del triángulo rectángulo AOB

Los números

5 _ 383 _ 8 _ 2 _ 936 _ 5 _ 8 _ 203 _ 9 _ 3 _ 76

son generados, al azar, rellenando los huecos con los dígitos de 0 a 9, uno distinto en cada lugar.

Halla la probabilidad de que se genere uno divisible por 396

SOLUCIÓN

Descomponiendo factorialmente, $396 = 4 \times 9 \times 11$

En principio, cualquier número de esas características es divisible por 4 al acabar en 76, divisible por 4

Si sumamos las cifras de ese número más los huecos obtenemos

$(5 + 3 + 8 + 3 + 8 + 2 + 9 + 3 + 6 + 5 + 8 + 2 + 0 + 3 + 9 + 3 + 7 + 6) + (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 135$,
que es divisible por 9 por lo que cualquier número generado será divisible por 9

Por último, las cifras que faltan ocupan lugares pares, por lo que haciendo:

suma de cifras en lugar impar – suma de cifras en lugar par =

$$(5 + 3 + 3 + 8 + 2 + 9 + 6 + 5 + 8 + 2 + 3 + 9 + 3 + 7) - (8 + 3 + 0 + 6 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) =$$

$$73 - 62 = 11: \text{cualquier número construido es múltiplo de 11}$$

Concluyendo, todo número generado según las condiciones del enunciado es múltiplo de 4, de 9 y de 11, por lo que será también múltiplo de 396 y

La probabilidad de que sea divisible por 396 es 1

Mariano y Ana marcharon de vacaciones a la playa. El tiempo ha sido esos días un poco desapacible y, al acabar las vacaciones, cuentan que ha llovido 9 días y han habido 10 mañanas y 9 tardes soleadas.

Teniendo en cuenta que los días que llovió por la mañana la tarde fue soleada, ¿cuántos días estuvieron de vacaciones?



SOLUCIÓN

Ningún día llovió, a la vez, mañana y tarde, pues si llovía por la mañana, por la tarde estaba el tiempo soleado.

Llamamos x a los días que llovió por la mañana. Los días de vacaciones serán, entonces, $10 + x$

Llamamos y a los días que llovió por la tarde. Los días de vacaciones serán, entonces, $9 + y = 10 + x \Rightarrow y - x = 1$. Además, los días que llovió fueron $x + y = 9$

Sumando las igualdades anteriores obtenemos que $2y = 10 \Rightarrow y = 5$, días en que llovió por la tarde. Como hubo 9 tardes soleadas,

las vacaciones duraron 14 días

Marina y Elisa están charlando. En un determinado momento dice Marina: "Sólo he mentido tres veces en mi vida", a lo que responde Elisa: "Esta es tu cuarta mentira"

Lo que contesta Elisa, ¿es cierto o falso?



SOLUCIÓN

Si Marina dice la verdad Elisa dice una frase falsa; si Marina miente no ha podido mentir antes tres veces por lo que la frase que dice no puede ser su cuarta mentira.

En resumen,

lo que dice Elisa es falso

Hay cuatro botes que, en su interior, contienen bolas blancas y bolas negras. En la tapa de cada bote está escrita la proporción de bolas blancas respecto del total de bolas contenidas en él.

Intercambiando las tapas de dos cualquiera de los cuatro botes y pasando algunas bolas blancas de uno de esos botes al otro (y viceversa) se puede hacer que el contenido de los botes quede de acuerdo con lo que señalan las tapas.

Si el total de bolas está comprendido entre 300 y 350, ¿Cuántas bolas blancas y cuantas bolas negras hay en total?



SOLUCIÓN

Si reducimos las fracciones que indican las tapas a común denominador tenemos las proporciones $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{8}{12}$ y $\frac{3}{12}$, siempre siguiendo el orden en que se muestran (izda-dcha, arriba-abajo).

Está claro de que, en cada bote, hay un número de bolas blancas de cada 12 bolas contenidas en él, por lo que es razonable pensar que el número total de bolas es un múltiplo de $4 \times 12 = 48$

Por tanto, teniendo en cuenta las limitaciones del enunciado en cuanto al número total de bolas,
 $300 < 48x < 350 \Rightarrow x = 7$

De ahí se deduce que hay $48 \times 7 = 336$ bolas en total de las cuales hay

$\left(\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{8}{12} + \frac{3}{12} \right) \times \frac{336}{4} = \frac{21}{12} \times 84 = 21 \times 7 = 147$ bolas blancas y $336 - 147 = 189$ bolas negras.

En resumen,

hay 147 bolas blancas y 189 bolas negras

Una serie bastante conocida en el mundillo matemático-recreativo es esta, que solo puede resolverse aplicando cierta dosis de ingenio:

1 – 11 – 21 – 1112 – 3112 – 211213 – 312213 –

¿Qué número sigue?



SOLUCIÓN

La clave para continuar la serie es anotar el número de ‘unos’, ‘doses’, ‘treses’... que tiene el número anterior.

Así, el elemento que sigue a 1 es ‘un uno’: 11, el siguiente es ‘dos unos’:21, el que sigue ‘un uno y un dos’:1112..., por lo que el que continúa la serie será ‘dos unos y dos doses y dos treses’:

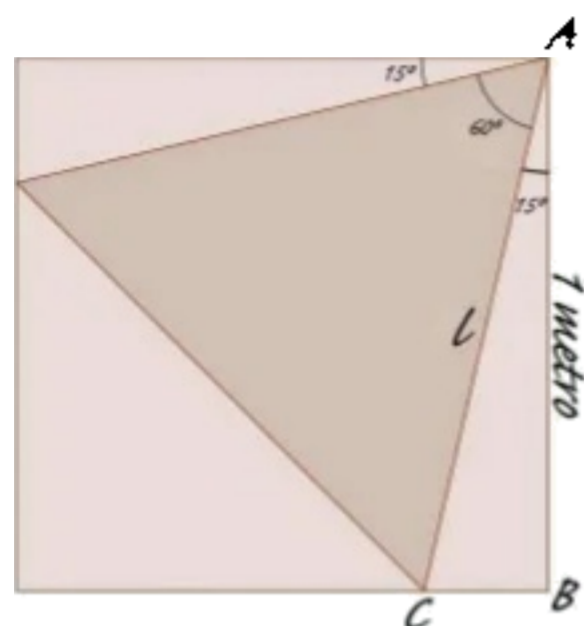
212223

Teniendo un cuadrado de 1 metro de lado, ¿cuáles son las longitudes de los lados de los triángulos equiláteros de máxima y mínima áreas inscritos en él?



SOLUCIÓN

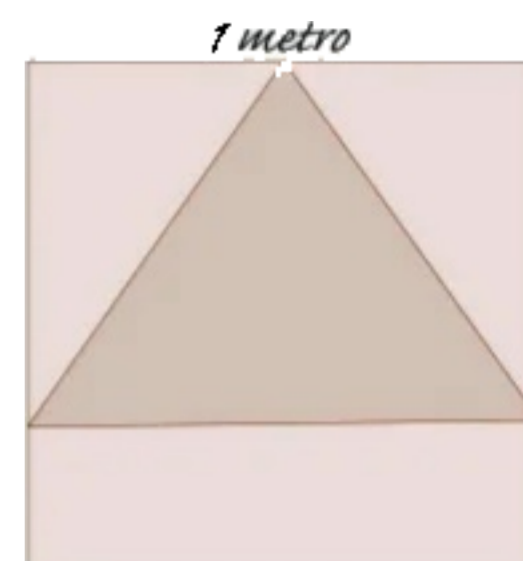
Si un triángulo está inscrito en el cuadrado, los tres vértices se sitúan sobre sus lados.



Por ello, el triángulo equilátero de área mínima es el que tiene, como longitud del lado la misma que la del lado del cuadrado.

Y el triángulo equilátero de área máxima se construirá tomando uno de sus vértices sobre un vértice del cuadrado. Según la figura adjunta, como el ángulo del triángulo es de 60° , los ángulos que complementan ese hasta el recto serán de 15° cada uno.

Aplicando la definición de coseno al triángulo rectángulo ABC tendremos que $\cos 15^\circ = \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{1}{\cos 15^\circ} = 1,035$



Por lo tanto,

la longitud del lado del triángulo inscrito de área máxima es 1,035 metros y la longitud del lado del triángulo inscrito de área mínima es 1 metro

Agustín y Diego van a recorrer 50 kilómetros en una excursión. Para ello, además de sus piernas, cuentan con un caballo que viaja siempre a 10 kilómetros por hora, aunque únicamente puede llevar a una persona.

Diego camina a 5 kilómetros por hora y Agustín a 8 kilómetros por hora.

Alternativamente caminan y cabalgan: cada uno, después de cabalgar, ata el caballo a un árbol para que el otro lo recoja y continúa a pie.

De esa forma llegan a la mitad del camino a la vez. Descansan allí media hora y continúan el trayecto por el mismo procedimiento para alcanzar, simultáneamente, el destino.

Si salen a las ocho de la mañana, ¿a qué hora terminan el recorrido?



SOLUCIÓN

Llamando d al recorrido que hace Diego a pie y t al tiempo (en horas) que están andando, se cumple que

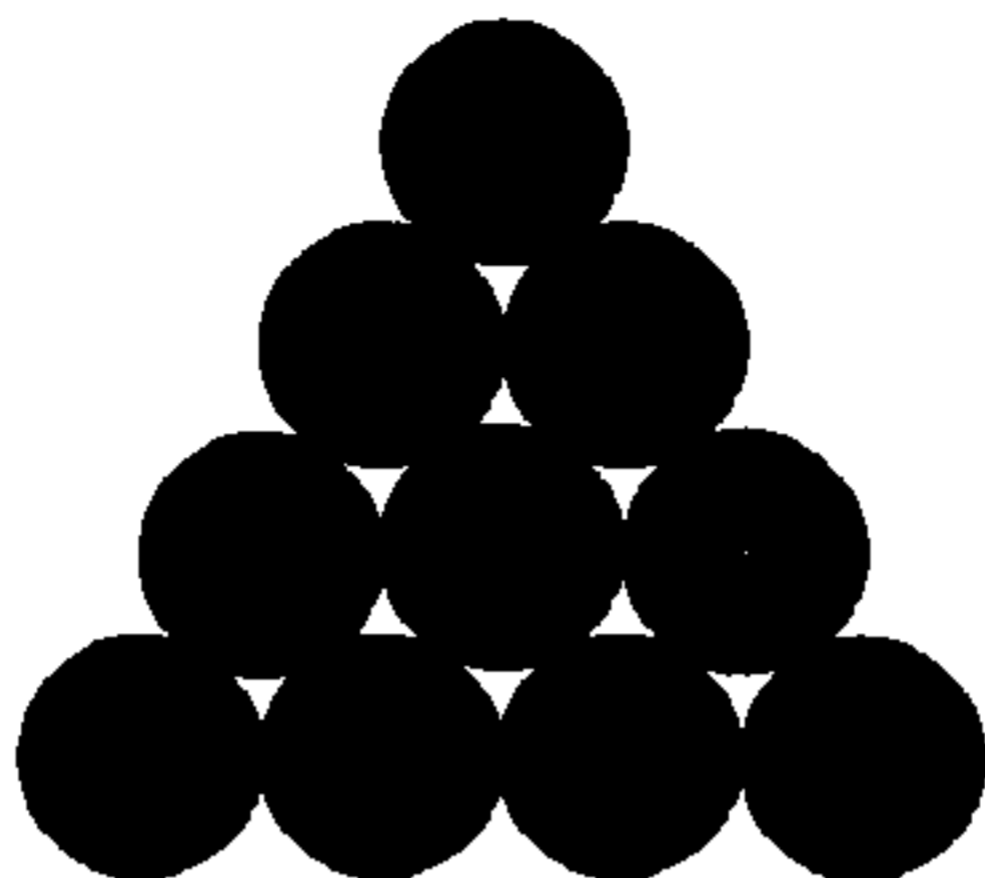
$$t = \frac{d}{5} + \frac{50-d}{10} \text{ y } t = \frac{50-d}{8} + \frac{d}{10} \Rightarrow \frac{d}{5} + \frac{50-d}{10} = \frac{50-d}{8} + \frac{d}{10} \Rightarrow \frac{50+d}{10} = \frac{250-d}{40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200 + 4d = 250 - d \Rightarrow 5d = 50 \Rightarrow d = 10$$

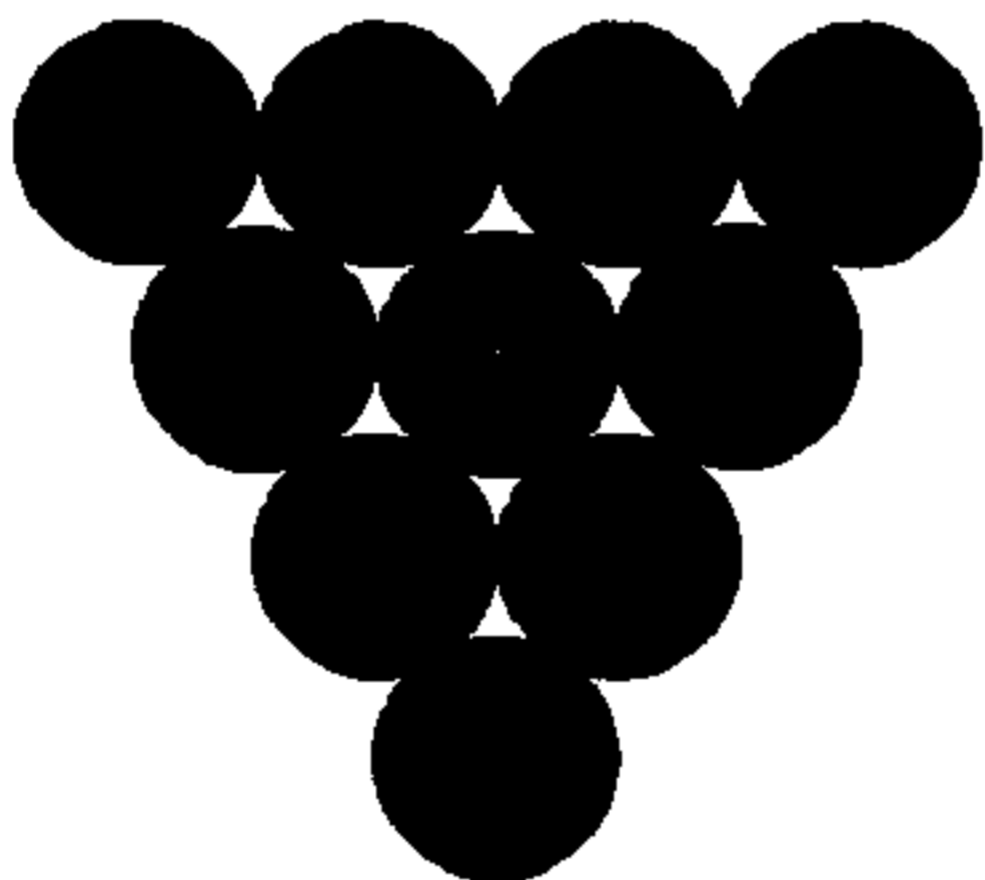
De ahí, $t = \frac{10}{5} + \frac{50-10}{10} = 2 + 4 = 6$ horas. Y, como están media hora descansando,

Llegan a las 14:30 horas al destino

En esta construcción de diez bolas

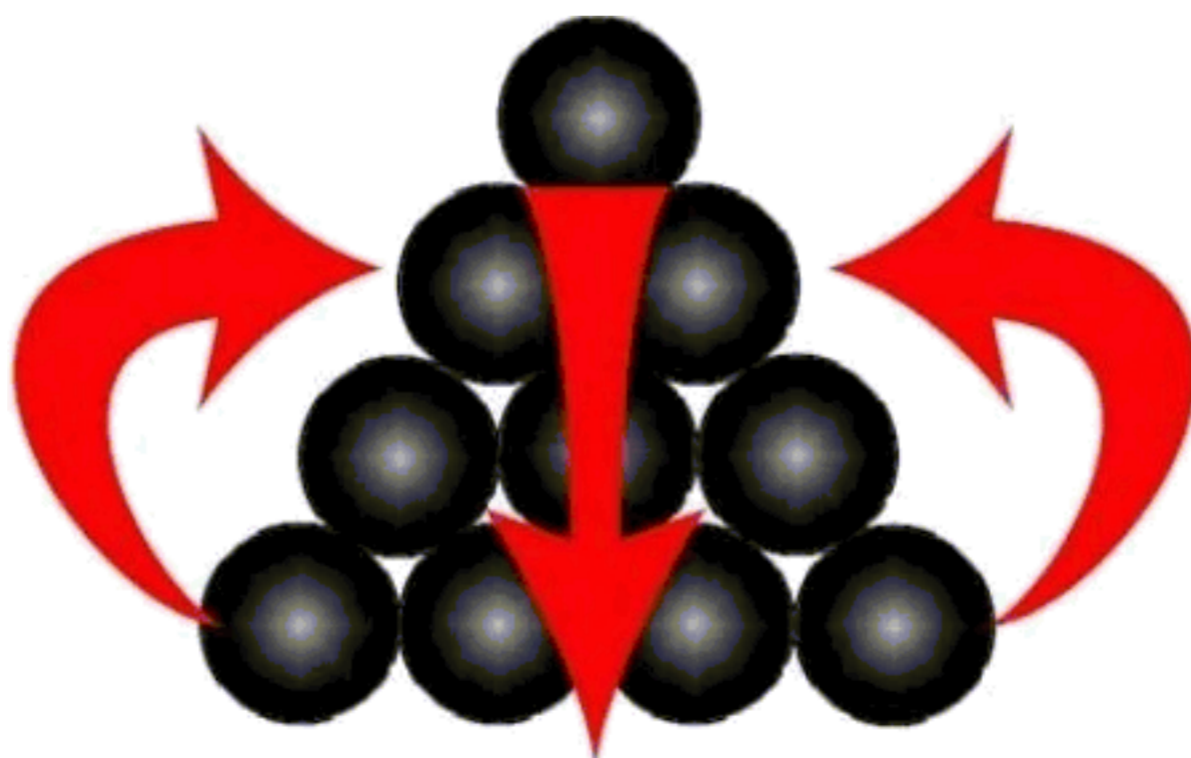


¿cómo se pueden mover tres bolas, exclusivamente, para que quede así la nueva figura?:



SOLUCIÓN

Basta hacer los movimientos que se indican:



para conseguir la figura final.

En un prado, que tiene forma de triángulo equilátero de 80 metros de lado, se encuentra una cabra atada a una estaca (por medio de una cuerda) colocada en uno de los vértices del triángulo.

¿Cuál debe ser la longitud de la cuerda para que la cabra pueda pastar sobre la mitad del prado?



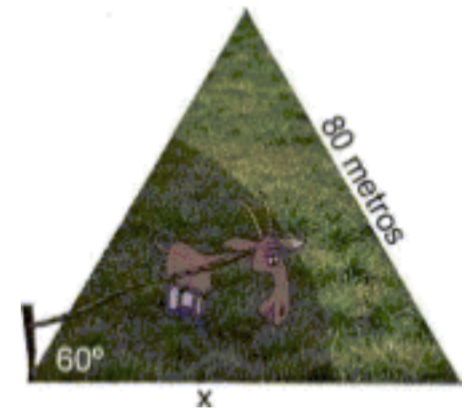
SOLUCIÓN

Como puede verse en el dibujo adjunto la cabra pastará, según las condiciones del problema, en un sector circular de 60° y radio x . Este radio es la longitud que se debe dar a la cuerda.

El área del triángulo equilátero de 80 metros de lado es

$$\frac{80 \times 40 \times \sqrt{3}}{2} = 1600 \times \sqrt{3} \text{ metros cuadrados, y el área del sector circular es}$$

$$\frac{\pi \times x^2}{6} \text{ metros cuadrados.}$$

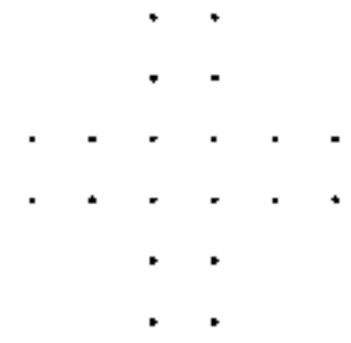


Como esta debe ser la mitad de aquella, $\frac{\pi \times x^2}{6} = \frac{1600 \times \sqrt{3}}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{9600 \times \sqrt{3}}{2 \times \pi} = 2646,3787 \Rightarrow x = 51,44$

Por tanto

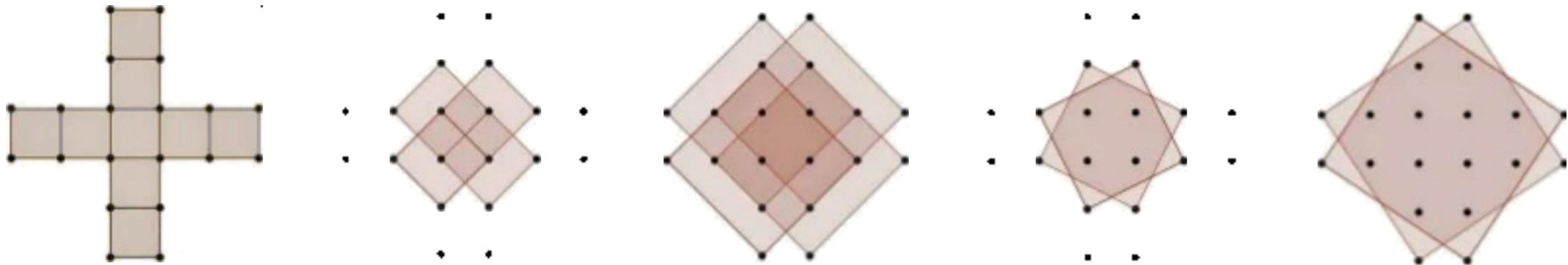
la longitud de la cuerda debe ser de 51,44 metros

¿Cuántos cuadrados distintos pueden formarse si cada vértice debe estar sobre uno de los puntos de la figura adjunta?



SOLUCIÓN

Según los cuadrados que se ven en cada figura



se obtienen 9, 4, 4, 2 y 2 cuadrados respectivamente, por lo que

hay 21 cuadrados distintos

En una familia la suma de las edades de todos sus miembros, excluido el patriarca (el de más edad), es igual a la edad de éste.

Además, si se multiplican todas las edades, excepto la del patriarca, el resultado es un número que solo contiene unos, tantos como miembros tiene la familia menos el patriarca.

Tampoco llegan a 100 años ninguno de la familia y todas las edades son números impares, menos la del patriarca, y distintos.

¿Cuáles son las edades de todos los miembros de la familia?



SOLUCIÓN

Las únicas posibilidades de resultado del producto de las edades son 11 , 1111 y 11111 , ya que el número de miembros de la familia (excepto el patriarca) debe ser par al ser todas las edades impares y sumar una cantidad par: la edad del patriarca; y valores superiores para el producto, con las mismas condiciones, darían edades cuya suma sería mayor que 100 .

Hagamos descomposiciones de los posibles productos con un número par de factores menores de 100 :

Está claro que si fuera $11 = 1 \times 11$ el patriarca tendría 12 años, lo cual es absurdo; y si fuera $1111 = 11 \times 101$ no cumpliría las condiciones.

$111111 = 1 \times 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$ es la única descomposición de este posible resultado que cumple todas las condiciones del problema, pues también $1 + 3 + 7 + 11 + 13 + 37 = 72 < 100$

En conclusión, la familia tiene siete miembros y

las edades son 1, 3, 7, 11, 13, 37 y 72 años

Tomamos un número entero positivo. Le sumamos una unidad y multiplicamos el resultado por el número original.

Al último valor obtenido le sumamos una unidad y volvemos a multiplicarlo por el número original.

Repetimos el mismo proceso otra vez y le sumamos una unidad al nuevo resultado, dándonos un cuadrado perfecto. ¿Cuál es?

C^2

SOLUCIÓN

Si llamamos n al número original, las operaciones que se describen son:

$$\begin{aligned} (((n+1) \times n+1) \times n+1) \times n+1 &= c^2 \Rightarrow ((n^2+n+1) \times n+1) \times n+1 = c^2 \Rightarrow (n^3+n^2+n+1) \times n+1 = c^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow n^4+n^3+n^2+n+1 &= c^2 \Rightarrow n^4+n^3+n^2+n = c^2-1 \Rightarrow n \times (n+1) \times (n^2+1) = (c+1) \times (c-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow (n^2+n) \times (n^2+1) &= (c+1) \times (c-1) \end{aligned}$$

De ahí, identificando los factores, vemos que el primer factor es dos unidades superior al segundo, por lo que $n^2+n = n^2+1+2 \Rightarrow n=3$

Por tanto, $c^2 = (((n+1) \times n+1) \times n+1) \times n+1 = (((3+1) \times 3+1) \times 3+1) \times 3+1 = 121$, cuadrado de 11

el número cuadrado perfecto es 121

Halla el primer término x de la sucesión $x, 3, 4, 6, 8, 12$.



SOLUCIÓN

La sucesión, no muy simple, cumple que $a_n = \frac{a_{n-1} \times a_{n-2}}{n-2}$, $\forall n > 2$ y $a_1 = x$, $a_2 = 3$.

$$\text{Por tanto, } a_3 = 4 = \frac{3 \times x}{3-2} = 3x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

el primer término es $\frac{4}{3}$

Obrero y medio construyen una valla y media en día y medio. ¿Cuántas vallas construirán 33 obreros en 11 días?



SOLUCIÓN

Si obrero y medio construyen una valla y media en día y medio, un obrero construirán una valla en día y medio, por lo que 33 obreros construirán, en 11 días, $\frac{33 \times 11}{1,5} = 242$ vallas.

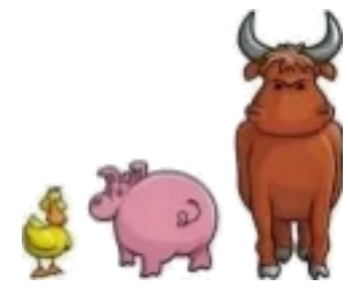
Es decir,

33 obreros construirán 242 vallas en 11 días

En una granja hay vacas, cerdos y patos. El número de cuernos multiplicado por el de patas y por el de alas da 720.

Conocer el número de vacas o el número de patos no permite saber cuántos animales hay de cada clase pero conociendo el número de cerdos sí.

¿Cuántos animales hay de cada clase?



SOLUCIÓN

Sea x el número de vacas, y el número de cerdos y z el número de patos.

Según el enunciado, $2x \times (4x + 4y + 2z) \times 2z = 720 \Rightarrow x \times (2x + 2y + z) \times z = 90 = 2 \times 3^2 \times 5$

Si z fuera par, lo sería también el paréntesis y, por tanto, el valor del producto sería, al menos divisible por 4, y no es el caso. Por tanto z es impar, lo que implica que x debe ser par.

Vemos ahora los casos posibles:

$$\text{a) } x = 2 \Rightarrow (4 + 2y + z) \times z = 3^2 \times 5 \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2y + z = 45, z = 1 \Rightarrow y = 20 \\ 4 + 2y + z = 15, z = 3 \Rightarrow y = 4 \\ 4 + 2y + z = 9, z = 5 \Rightarrow y = 0, \text{ imposible : debe haber cerdos} \end{cases}$$

$$\text{b) } x = 6 \Rightarrow (4 + 2y + z) \times z = 3 \times 5 \Rightarrow \{12 + 2y + z = 15, z = 1 \Rightarrow y = 1$$

Con el número de vacas no podemos saber la solución, por lo que $x = 2$. Con el número de patos tampoco, por lo que $z = 1$. En consecuencia, debe ser $y = 20$

Por tanto,

hay 2 vacas, 20 cerdos y 1 pato

Halla los valores de cada una de los dígitos que representan las letras de la expresión siguiente:

$$AA^{BB} = CCDD^{EE}$$

sabiendo que a letras diferentes les corresponden dígitos diferentes y que B es múltiplo de E, el cuál es distinto de la unidad.

SOLUCIÓN

Sea $B = n \times E$. Entonces, $BB = 10 \times B + B = 10 \times n \times E + n \times E = n \times (10 \times E + E) = n \times EE$

Por tanto, $AA^{BB} = AA^{n \times EE} = (AA^n)^{EE} = CCDD^{EE} \Rightarrow AA^n = CCDD$, y

$$AA^n = (10 \times A + A)^n = (11 \times A)^n = CCDD = 1000 \times C + 100 \times C + 10 \times D + D = 1100 \times C + 11 \times D$$

En resumen, $(11 \times A)^n = 11 \times (100 \times C + D)$

Por otro lado, como son B y E $\neq 1$ son dígitos, necesariamente $n = 2, 3$ o 4

Estudiamos caso por caso:

$$1. \quad n = 2 \Rightarrow (11 \times A)^2 = 11 \times (100 \times C + D) \Rightarrow 11 \times A^2 = 100 \times C + D \Rightarrow A^2 = \frac{100 \times C + D}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = 9 \times C + \frac{C + D}{11}, \text{ y estudiamos los posibles valores de las letras:}$$

$$* C = 2, D = 9 \Rightarrow A^2 = 19 : \text{imposible}$$

$$* C = 9, D = 2 \Rightarrow A^2 = 82 : \text{imposible}$$

$$* C = 3, D = 8 \Rightarrow A^2 = 28 : \text{imposible}$$

$$* C = 8, D = 3 \Rightarrow A^2 = 73 : \text{imposible}$$

$$* C = 4, D = 7 \Rightarrow A^2 = 37 : \text{imposible}$$

$$* C = 7, D = 4 \Rightarrow A^2 = 64 \Rightarrow A = 8$$

$$* C = 5, D = 6 \Rightarrow A^2 = 46 : \text{imposible}$$

$$* C = 6, D = 5 \Rightarrow A^2 = 55 : \text{imposible}$$

$$2. \quad n = 3 \Rightarrow (11 \times A)^3 = 11 \times (100 \times C + D) \Rightarrow 11^2 \times A^3 = 100 \times C + D \Rightarrow A^3 = \frac{100 \times C + D}{121}, \text{ y vemos que}$$

es imposible para cualquier valor de las letras como dígitos.

$$3. \quad n = 4 \Rightarrow (11 \times A)^4 = 11 \times (100 \times C + D) \Rightarrow 11^3 \times A^4 = 100 \times C + D \Rightarrow A^4 = \frac{100 \times C + D}{1331}, \text{ imposible}$$

también.

El único caso posible es para $A = 8, C = 7$ y $D = 4$ y permite deducir, de manera inmediata, que deben ser $E = 3$ y $B = 6$ para que se cumplan las condiciones del problema. Por tanto, la igualdad es

$$88^{66} = 7744^{33}$$

Un tren parte de Paris hacia Marsella al mismo tiempo que otro sale de Marsella a Paris en sentido inverso al primero, los dos con velocidad siempre constante.

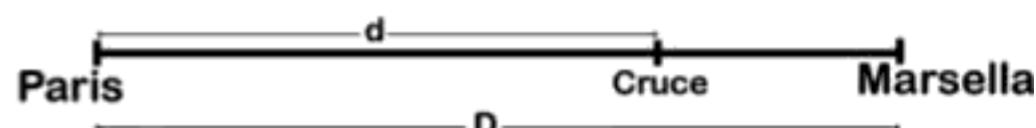
El primer tren llega a Marsella una hora después de cruzarse con el segundo tren que, a su vez, alcanza Paris cuatro horas después del instante del cruce.

¿Cuál es la proporción entre las velocidades de ambos?



SOLUCIÓN

Sea x la velocidad del tren Paris-Marsella e y la velocidad del tren Marsella-Paris, ambas en km/h.



Llamamos d a la distancia, en kilómetros, que hay de Paris al punto de cruce y D a la distancia entre Paris y Marsella.

En estas condiciones, el tiempo empleado por ambos trenes, desde su salida hasta que se cruzan, es idéntico en ambos casos: $\frac{D-d}{y} = \frac{d}{x}$ según la expresión $tiempo = \frac{espacio}{velocidad}$, luego $\frac{x}{y} = \frac{d}{D-d}$

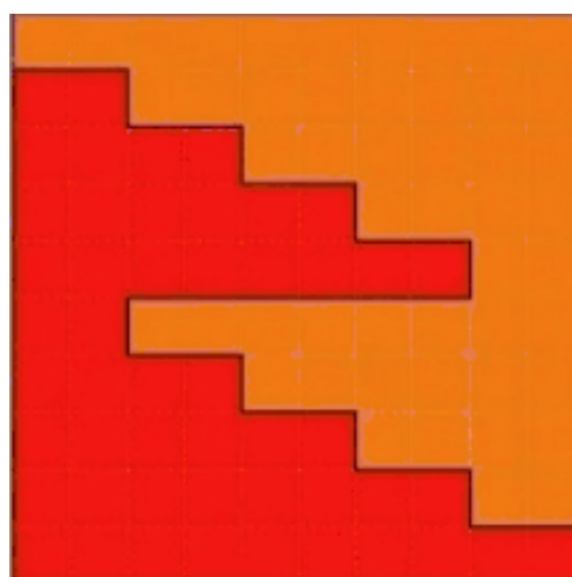
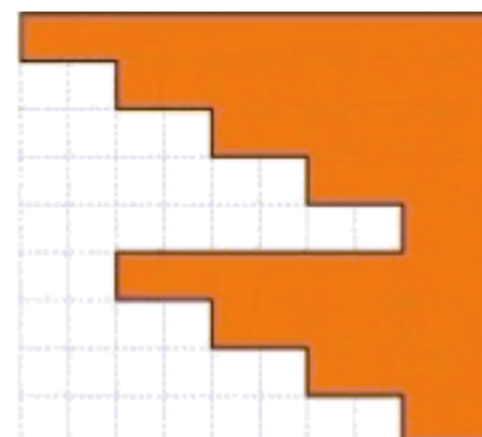
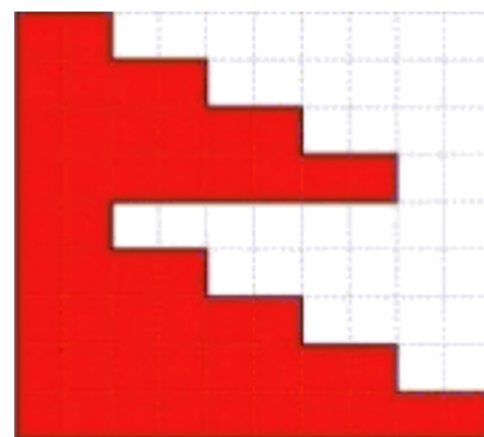
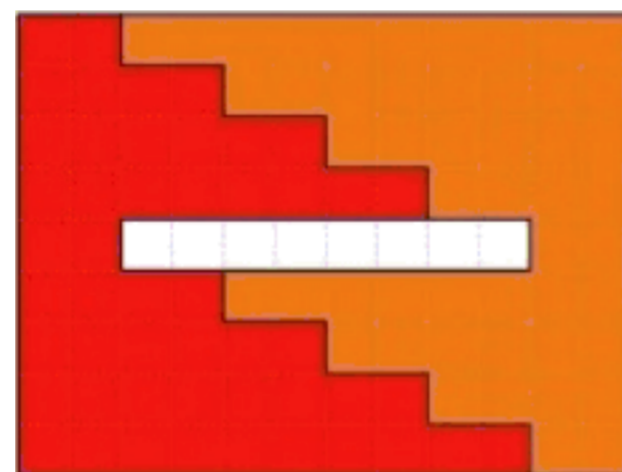
Por otro lado, después del cruce, $\frac{D-d}{x} = 1$ y $\frac{d}{y} = 4 \Rightarrow d = 4y$ y $D-d = x$

En resumen, $\frac{x}{y} = \frac{4y}{x} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = 4 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$

y se deduce que

la velocidad del tren Paris-Marsella es el doble de la velocidad del tren Marsella-Paris

El corte del



Manolo va a cobrar un cheque al banco. El cajero se equivoca al hacerlo efectivo: toma la cantidad de euros por la de céntimos y esta por aquella.

El resultado de la equivocación es que, tras perder después 5 céntimos, Manolo tiene el doble de la cantidad que, en realidad, hubiera debido cobrar.

¿Cuánto debería haber cobrado?



SOLUCIÓN

Sea x la cantidad de euros que debe cobrar e y la cantidad de céntimos.

Según el enunciado, expresado en céntimos, $2 \times (100x + y) = 100y + x - 5 \Rightarrow 98y - 199x = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{199x + 5}{98} \Rightarrow y = 2x + \frac{3x + 5}{98}. \text{ Si hacemos } t = \frac{3x + 5}{98} \Rightarrow 3x = 98t - 5 \Rightarrow x = 32t - 1 + \frac{2t - 2}{3}$$

$$\text{Por último, si } s = \frac{2t - 2}{3} \Rightarrow 2t = 3s + 2 \Rightarrow t = s + 1 + \frac{s}{2}$$

Está claro que la cantidad de céntimos y de euros debe ser menor que 100, al deber serlo la primera (para que sea lógica la escritura en el cheque) y al deber identificar la cantidad de céntimos con la de euros.

Demos ahora valores válidos a las variables: $s = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 31 \Rightarrow y = 63$, lo cual es posible.

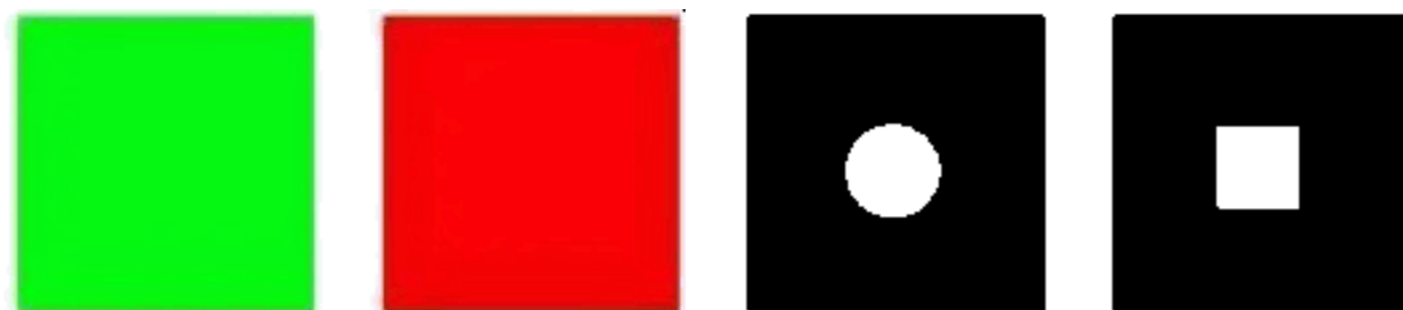
Si $s = 2 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow x = 125$, lo cual no es admisible. Para valores superiores de s no podríamos encontrar tampoco soluciones válidas, pues x sería siempre superior a 100.

a la distancia, en kilómetros, que hay de Paris al punto de cruce y D a la distancia entre Paris y Marsella.

Por lo tanto debería haber cobrado

31 euros con 63 céntimos

Cuatro tarjetas cuadradas están dispuestas como en la imagen. Todas tienen una cara lisa de un color determinado y otra negra en la que hay un dibujo geométrico.



Se cumple, en ellas, que *cada tarjeta verde tiene, en su dorso, un círculo*.

¿Cuál es la mínima cantidad de tarjetas, y cuáles son, a las que hay que dar la vuelta para poder confirmarlo con seguridad?

SOLUCIÓN

Las tarjetas segunda y tercera no contradicen la afirmación, tengan la otra cara como la tengan.

En la primera se deberá confirmar que tiene un círculo en la otra cara y en la cuarta deberemos asegurarnos que la otra cara no es verde, por lo que

se deberán girar las tarjetas primera y cuarta

Halla el multiplicando en el producto

$$\begin{array}{r}
 \text{? ? ? ?} \\
 \times \text{F P} \\
 \hline
 \text{G K B F P} \\
 \text{P G B F} \\
 \hline
 \text{Y M F P P}
 \end{array}$$

considerando que a letras distintas les corresponden dígitos distintos y F no es cero.

SOLUCIÓN

Evidentemente, $P > F$, pues el producto por P posee cinco dígitos y el producto por F tiene cuatro.

$$\begin{array}{r}
 \text{? ? ? ?} \\
 \times \text{2 4} \\
 \hline
 \text{G K B 2 4} \\
 \text{4 G B 2} \\
 \hline
 \text{Y M 2 4 4}
 \end{array}$$

Además, se observa en la segunda columna de la suma que $2F = P$ debido a lo anterior y, por tanto, $F < 5$.

Teniendo en cuenta lo dicho, y según la tercera columna de la suma, $F = 2B$ o $10 + F = 2B$ por lo que F debe ser par: 2 o 4 y P , respectivamente, 4 u 8.

Si $F = 2$ y $P = 4$, es evidente que tendremos lo que se ve en la primera imagen.

De ahí, debe ser $G = 1$ y, en consecuencia, $B = 6$.

Llegando a este punto, si observamos los dos números de la suma vemos que el superior no puede ser nunca el doble del inferior, como debiera, por lo que la hipótesis de partida es falsa.

$$\begin{array}{r}
 \text{? ? ? ?} \\
 \times \text{2 4} \\
 \hline
 \text{1 K 6 2 4} \\
 \text{4 1 6 2} \\
 \hline
 \text{Y M 2 4 4}
 \end{array}$$

Vemos ahora el otro supuesto: $F = 4$ y $P = 8$. Tendremos lo que se ve:

Evidentemente, el primer dígito del multiplicando debe ser 2, $Y = 9$ y $G = 1$ para que el término superior de la suma sea el doble que el inferior.

Tenemos entonces lo que se ve en la cuarta imagen.

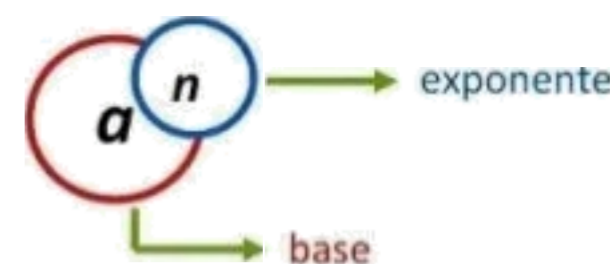
$$\begin{array}{r}
 \text{? ? ? ?} \\
 \times \text{4 8} \\
 \hline
 \text{G K B 4 8} \\
 \text{8 G B 4} \\
 \hline
 \text{Y M 4 8 8}
 \end{array}$$

De ahí, y según los valores de letras que han aparecido, se deduce que el tercer término del multiplicando debe ser 0, por lo que $K = 6$, $M = 7$ y $B = 2$, deduciéndose inmediatamente los otros dígitos del producto, quedando al final

$$\begin{array}{r}
 \text{2 ? ? ?} \\
 \times \text{4 8} \\
 \hline
 \text{1 K B 4 8} \\
 \text{8 1 B 4} \\
 \hline
 \text{9 M 4 8 8}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{2 0 3 1} \\
 \times \text{4 8} \\
 \hline
 \text{1 6 2 4 8} \\
 \text{8 1 2 4} \\
 \hline
 \text{9 7 4 8 8}
 \end{array}$$

Halla tres números naturales distintos tales que la suma de los cubos de los dos primeros sea igual a la cuarta potencia del otro.



SOLUCIÓN

Sean los números m , n y p tales que, como dice el enunciado, $m^3 + n^3 = p^4$

Dividiendo por p^3 tenemos $\left(\frac{m}{p}\right)^3 + \left(\frac{n}{p}\right)^3 = p$

Elegimos entonces valores de las fracciones distintas de la unidad. Por ejemplo, $\frac{m}{p} = 2$ y $\frac{n}{p} = 3$

$$\text{De ahí, } \left(\frac{m}{p}\right)^3 + \left(\frac{n}{p}\right)^3 = p \Rightarrow p = 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$$

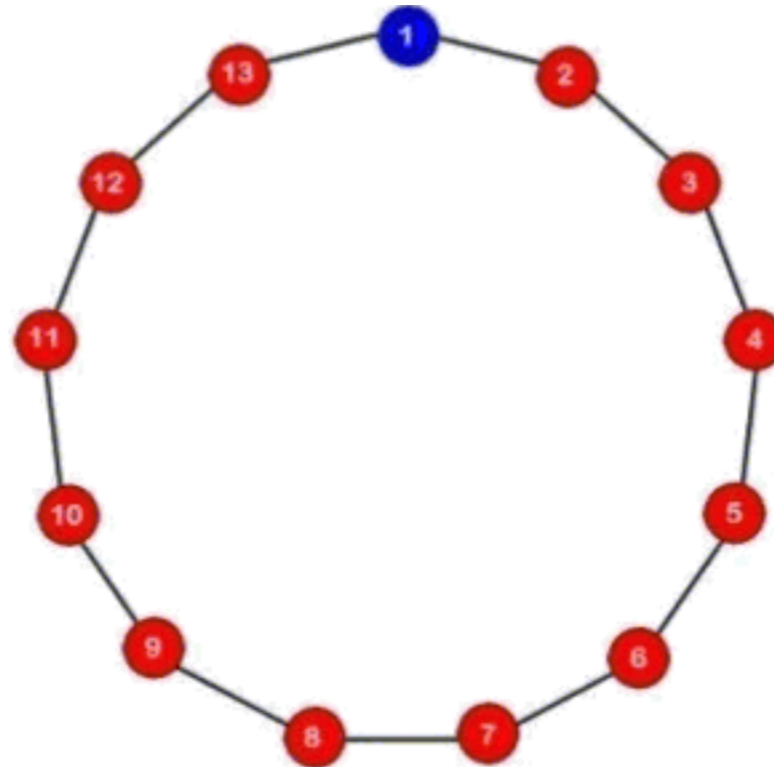
$$\text{Por lo tanto, } \frac{m}{p} = 2 \Rightarrow m = 2p \Rightarrow m = 70 \text{ y } \frac{n}{p} = 3 \Rightarrow n = 3p = 105$$

Los números pueden ser

70, 105 y 35

Evidentemente, la solución no es única.

Se tienen 12 *gomets* rojos y uno azul dispuestos en círculo. Empezando por el *gomet* que se desee hay que contar 13, en el sentido de las agujas del reloj, y eliminar el que haga ese número.



Sucesivamente, hay que empezar otra vez a contar 13 desde el siguiente al eliminado repitiendo la operación hasta que quede uno solo.

¿Por qué *gomet* hay que comenzar a contar para que, al final, solo quede el azul?

SOLUCIÓN

Si empezamos a contar por el que está numerado con el 1 acabaríamos, al realizar el proceso completo, con el gomet 8 como el único que queda. Por tanto,

**hay que empezar por el *gomet* situado
siete lugares antes que el azul (el 7)**



Un comerciante tenía cinco barriles de vino y uno de cerveza, conteniendo, cada uno, los litros que se indican en la figura.

Vendió ciertos barriles a un cliente y otros a un segundo cliente, de manera que el primero obtuvo el doble de vino que el otro, quedándose el comerciante con el barril de la cerveza.

¿Cuántos litros contenía ese barril?

SOLUCIÓN

Está claro que el número de litros de vino debe ser múltiplo de 3 porque al primer cliente le vende $2n$ litros y al segundo n litros.

Observemos que

$$75 = 3 \times 15$$

$$155 = 3 \times 51 + 2$$

$$95 = 3 \times 31 + 2$$

$$100 = 3 \times 33 + 1$$

$$80 = 3 \times 26 + 2$$

$$90 = 3 \times 30$$

por lo que la única suma de cinco barriles que da una cantidad de litros de vino que sea múltiplo de 3 es la de todos excepto el de 100 litros, que será el de cerveza.

Además, como $75 + 155 + 95 + 80 + 90 = 495$ y $495 \div 3 = 165$, al primer cliente le vendió los barriles con 155, 95 y 80 litros, que hacen un total de 330 litros, y al segundo los barriles con 75 y 90 litros, que hacen un total de 165 litros.

En resumen,

el barril de cerveza contiene 100 litros

Dos personas viven en el mismo edificio y trabajan en la misma empresa. Una va de su casa al lugar de trabajo en 20 minutos y a la otra le cuesta 30 minutos el mismo trayecto, yendo siempre ambas a velocidad constante

Si la más rápida sale de casa 5 minutos después que la más lenta, ¿cuánto tardará en alcanzarle?



SOLUCIÓN

Si la diferencia de tiempos es de 10 minutos, éste sería el tiempo en que llegarían a la vez si la rápida retrasase su salida 10 minutos.

Por tanto, al ir a velocidad constante, al retrasar su salida 5 minutos alcanzará a la lenta a mitad del trayecto, es decir, cuando esta lleve 15 minutos recorridos y la rápida, 10.

O sea,

la alcanzará en 10 minutos

Le pregunté al hijo de un amigo, muy aficionado a los trabalenguas, cuántos años tenía.

Y me dijo: “haz tres veces los años que tendré dentro de tres años y réstale tres veces los años que tenía hace tres años. Tendrás entonces los años que tengo ahora”.

¿Cuántos años tenía?



SOLUCIÓN

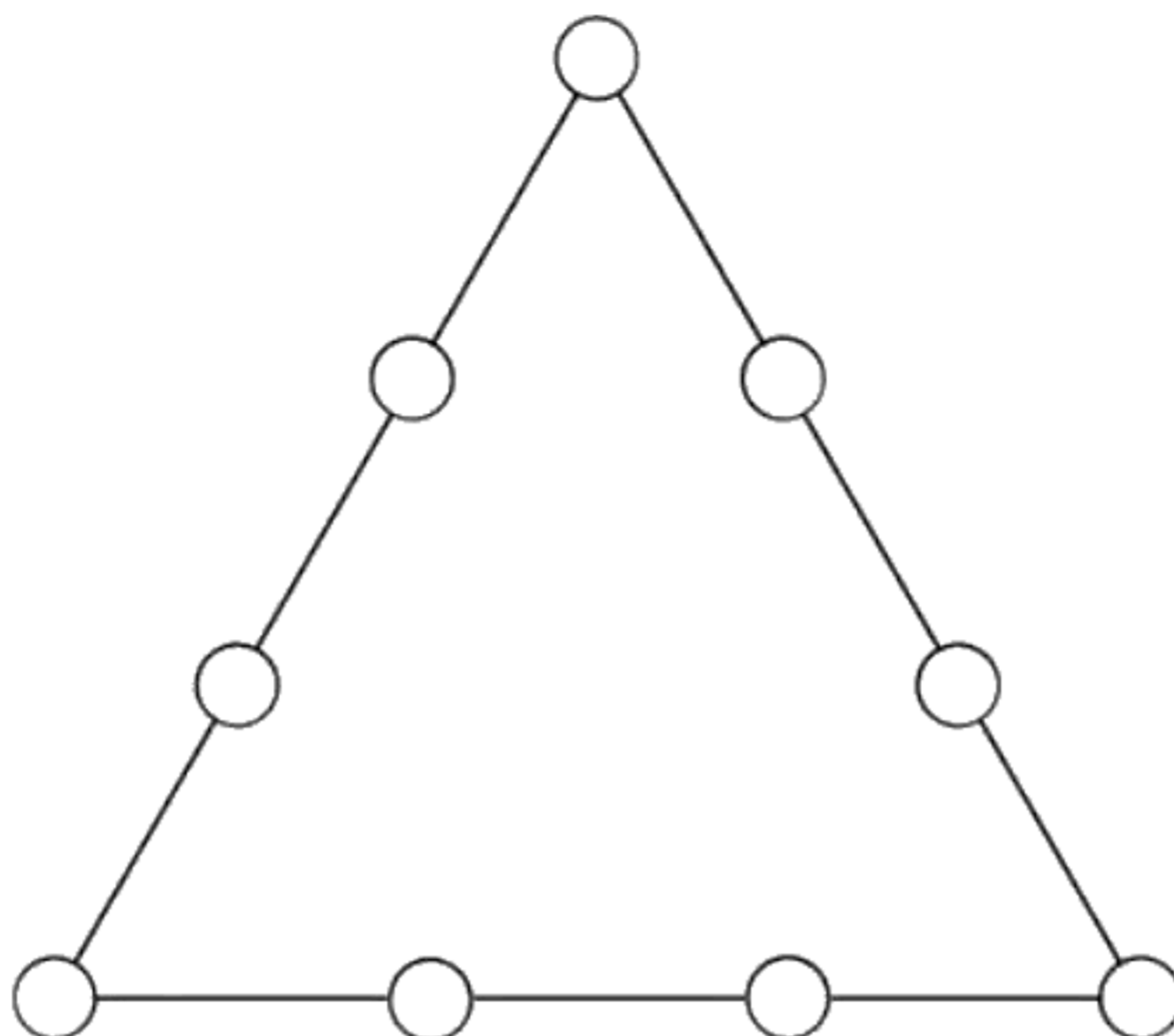
Expresamos la frase mediante una ecuación algebraica, siendo x los años que tenía:

$$3 \times (x + 3) - 3 \times (x - 3) = x \Rightarrow 3x + 9 - 3x + 9 = x \Rightarrow x = 18$$

En conclusión,

tenía 18 años

Sitúa sobre los círculos del triángulo las nueve cifras significativas de manera que la suma de cada lado sea 20.

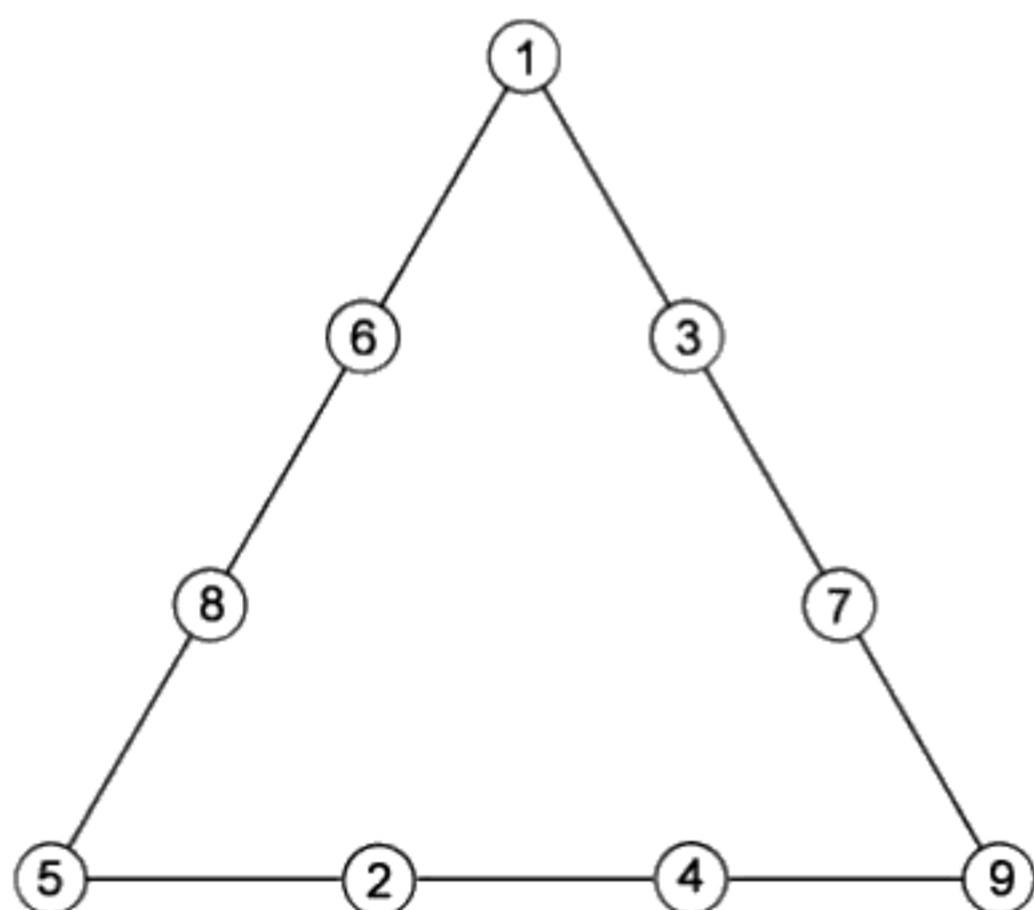


SOLUCIÓN

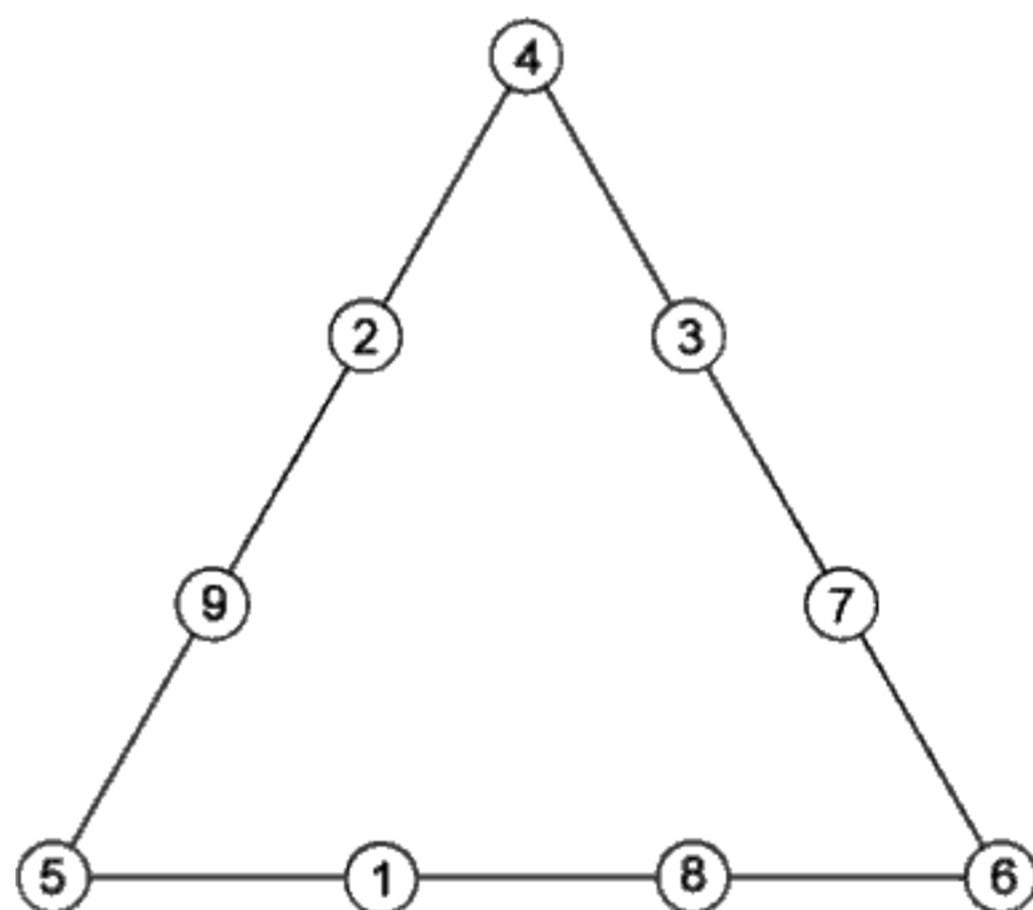
Como la suma de las nueve cifras es 45, y las esquinas cuentan por dos, la suma de los dígitos de las esquinas deberán sumar 15 ($= 3 \times 20 - 45$)

Hay varias posibilidades, entre ellas estas:

Con 1, 5 y 9 se obtiene



Con 4, 5 y 6 se obtiene



Siete amigos se reúnen cada semana en un restaurante, para charlar sobre sus asuntos, alrededor de una mesa redonda. Tienen por costumbre sentarse siempre en un orden distinto al que hubieran estado antes en alguna otra reunión.

¿Al cabo de cuántas semanas tendrán que sentarse en una disposición ya repetida?



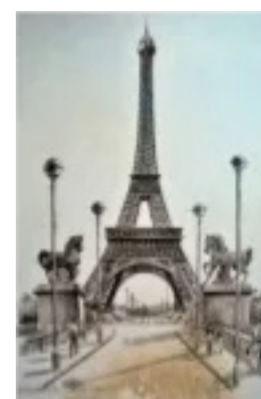
SOLUCIÓN

Está claro que, fijando a uno de los comensales como referencia, las disposiciones diferentes serán todas las permutaciones posibles entre los otros seis: $6! = 720$. Como 720 semanas equivalen a 14 años aproximadamente,

**Se podrán sentarse en una posición anterior después de
14 años aproximadamente: a las 720 semanas**

La torre Eiffel tiene 300 metros de altura y está construida totalmente de hierro, pesando en total 8000 toneladas.

¿Qué altura tendrá una maqueta de la torre construida con el mismo material y que pese solo un kilogramo?



SOLUCIÓN

Al estar construidas con el mismo material, el volumen de la maqueta será también 8000000 veces más pequeño, en kilogramos, que la torre original. Por lo tanto, al ser el volumen tridimensional y la altura unidimensional, la de la maqueta será $\sqrt[3]{8000000} = 200$ veces más pequeña que la de la torre real y, por tanto, medirá $\frac{300}{200} = 1,5$.

Es decir,

la maqueta medirá metro y medio de altura

Sean los números reales α, β, γ, m tales que $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{\cos(\alpha + \beta + \gamma)} = m$

Calcula el valor de $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha)$

SOLUCIÓN

De la expresión dada se deduce que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma}{m}$ y que

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{m}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\alpha + \beta + \gamma) + \cos^2(\alpha + \beta + \gamma) - 1 &> \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma}{m} \right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{m} \right)^2 - 1 > \\ &> \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma + 2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha}{m^2} + \\ &+ \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \cos \beta \cos \gamma + 2 \cos \gamma \cos \alpha}{m^2} - 1 > \\ &> \frac{1 + 1 + 1 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + 2(\cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma) + 2(\cos \gamma \cos \alpha + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha)}{m^2} - 1 > \\ &> 3 + 2 \cos(\alpha - \beta) + 2 \cos(\beta - \gamma) + 2 \cos(\gamma - \alpha) - m^2 > \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) = \frac{m^2 - 3}{2}$$

Tres naipes, sacados de una baraja española, están boca arriba en una fila horizontal.

A la derecha de un Rey hay uno o dos caballos y a la izquierda de un caballo hay uno o dos caballos. A la izquierda de una copa hay uno o dos oros y a la derecha de un oro hay uno o dos oros.

¿De qué tres cartas se trata?



SOLUCIÓN

Veamos todas las posibilidades.

1. "A la derecha de un Rey hay uno o dos caballos". Entonces, pueden estar situados así:

Rey-Caballo-Otra Rey-Caballo-Caballo Rey-Otra-Caballo Otra-Rey-Caballo

Pero dice también que "a la izquierda de un caballo hay uno o dos caballos", por lo que las únicas válidas, de las anteriores, son

Rey-Caballo-Caballo Caballo-Rey-Caballo

2. "A la izquierda de una copa hay uno o dos oros". Las situaciones posibles serían:

OroOroCopa OroOtraCopa OtraOroCopa OroCopaOtra

Pero dice también que "a la derecha de un oro hay uno o dos oros", por lo que las únicas válidas, de las anteriores, son

OroOroCopa OroCopaOro

Uniendo los cuatro posibles resultados dos a dos

- Rey-Caballo-Caballo y OroOroCopa
- Rey-Caballo-Caballo y OroCopaOro
- Caballo-Rey-Caballo y OroOroCopa
- Caballo-Rey-Caballo y OroCopaOro (*imposible: no puede haber dos caballos de oros*)

vemos que, en un caso se produciría una repetición de carta y los otros tres conducen al mismo resultado.

Por lo tanto, las tres cartas son

rey de oros, caballo de oros y caballo de copas

Dos sabios fueron capturados por un rey y hechos prisioneros. Para poner a prueba su inteligencia fueron encerrados en celdas separadas de una torre, una que miraba hacia el Este y otra hacia el Oeste de modo que no pudieran comunicarse entre sí. Desde sus celdas podían ver, entre ambos, todas las ciudades que componían el reino, pero ninguna ciudad era visible a la vez por los dos.

El rey les dijo que las ciudades del reino eran o bien 10 o bien 13 y que ambos serían liberados tan pronto como uno cualquiera de ellos pudiera anunciarle al carcelero, que cada mañana les llevaba la comida, cuántas ciudades integraban el reino. El rey añadió que sólo iba a alimentarlos durante una semana.



En la quinta mañana, los dos sabios fueron liberados.

¿Cuántas ciudades componen el reino?, ¿cuántas ciudades vio cada uno?

SOLUCIÓN

Las posibilidades de ver 13 ciudades, en los términos que se indican en el enunciado, son:

0-13 1-12 2-11 3-10 4-9 5-8 6-7

y las de ver 10 ciudades: 0-10 1-9 2-8 3-7 4-6 5-5

Cualquiera de ellos que hubiera visto, el primer día, 11, 12 o 13 ciudades habría declarado que había 13 ciudades, por lo que no pudo ninguno haber visto más 10 ciudades.

Tenemos, en ese caso, las posibilidades siguientes:

Para 13: 3-10 4-9 5-8 6-7

Para 10: 0-10 1-9 2-8 3-7 4-6 5-5

En el segundo día, quien hubiera visto 0, 1 o 2 ciudades hubiera declarado que había 10 ciudades, por lo que nadie vio menos de 3 ciudades.

Para el tercer día, las posibilidades que quedan son:

Para 13: 3-10 4-9 5-8 6-7

Para 10: 3-7 4-6 5-5

Si alguno hubiera visto 8, 9 o 10 ciudades hubiera dicho que había 13 ciudades y no lo dijo, por lo que ninguno vio más de 7 ciudades.

El cuarto día reduce las posibilidades a:

Para 13: 6-7

Para 10: 3-7 4-6 5-5

Está claro que cualquiera que hubiese visto 3, 4 o 5 ciudades determinaría que había 10 ciudades, por lo que el quinto día determinaba que sólo quedaba una posibilidad:

Había 13 ciudades: un sabio había visto 6 y el otro 7

El cuadrado perfecto 25 tiene una peculiaridad: incrementando sus cifras una unidad se obtiene otro número cuadrado perfecto, el 36.

¿Qué número cuadrado perfecto de cuatro cifras posee la misma propiedad?



SOLUCIÓN

Sea a^2 el número buscado que, al incrementar sus cifras en una unidad, se convierte en b^2 .

La propiedad citada en el enunciado se plasma en la expresión: $b^2 - a^2 = 1111$

Por tanto, $b^2 - a^2 = (b - a) \times (b + a) = 1111 = 11 \times 101$

Es evidente que a y b deben poseer dos cifras, por lo que $\left. \begin{array}{l} b - a = 11 \\ b + a = 101 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 56 \\ a = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 = 3136 \\ a^2 = 2025 \end{array} \right\}$, luego el número buscado es

2025

Mi lagarto Juanito tiene una cabeza que mide 9 centímetros y su cola mide tanto como la cabeza más la mitad de su cuerpo. El cuerpo mide tanto como la cabeza y la cola juntas.

¿Cuánto mide Juanito?



SOLUCIÓN

Si llamamos co a la longitud de su cola, cu a la de su cuerpo y l a su longitud total tenemos, según el enunciado, que $co = 9 + \frac{cu}{2}$ y que $cu = 9 + co > co = cu - 9$. Por tanto, $cu - 9 = 9 + \frac{cu}{2} > \frac{cu}{2} = 18 > > cu - 36 > co = 9 + \frac{36}{2} = 27$

O sea, la longitud total será $l = 9 + cu + co = 9 + 36 + 27 = 72$

En consecuencia,

el lagarto mide 72 centímetros

Un gavián vio un grupo de palomas y les dijo: “¡adiós, mis cien palomas!”, a lo que una de ellas respondió: “no vamos cien pero nosotras más nosotras más la mitad de nosotras juntas y la mitad de la mitad de todas nosotras y usted, señor gavián, sumamos cien...”

¿Cuántas palomas formaban la bandada?



SOLUCIÓN

Llamamos p a la cantidad de palomas de la bandada. Entonces, $p + p + \frac{p}{2} + \frac{p}{4} + 1 = 100 \Rightarrow \frac{11p}{4} = 99$

Por tanto $p = 36$.

Había 36 palomas en la bandada

A un examen se presentan 31 personas y sabemos que las aragonesas aprobaron todas, siendo su número el 5% exacto de todas las que aprobaron.

¿Cuántas personas de Aragón asistieron al examen?



SOLUCIÓN

El único número entero del que puede obtenerse un 5% entero que, además, sea menor de 31 es 20, por lo que este número indica el número de aprobados. Por consiguiente, el 5% de 20 personas es...

una persona de Aragón se presentó al examen

Un coche marcha, a velocidad constante, por una carretera en la que hay una serie de anuncios espaciados regularmente. El número de anuncios que el coche rebasa en un minuto es la décima parte del valor de su velocidad, dada en kilómetros por hora.

¿Cuál es la distancia de separación entre dos anuncios?



SOLUCIÓN

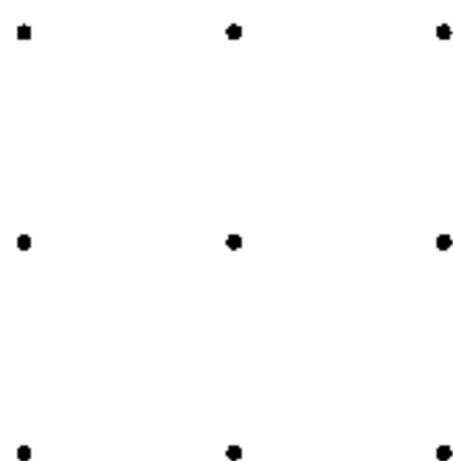
Si x es el número de anuncios rebasados por el coche en un minuto, en una hora habrá rebasado $60x$ anuncios.

Además la velocidad del coche es de $10x$ km/h por lo que en $10x$ kilómetros habrá pasado $60x$ anuncios: 6 anuncios cada kilómetro.

En resumen,

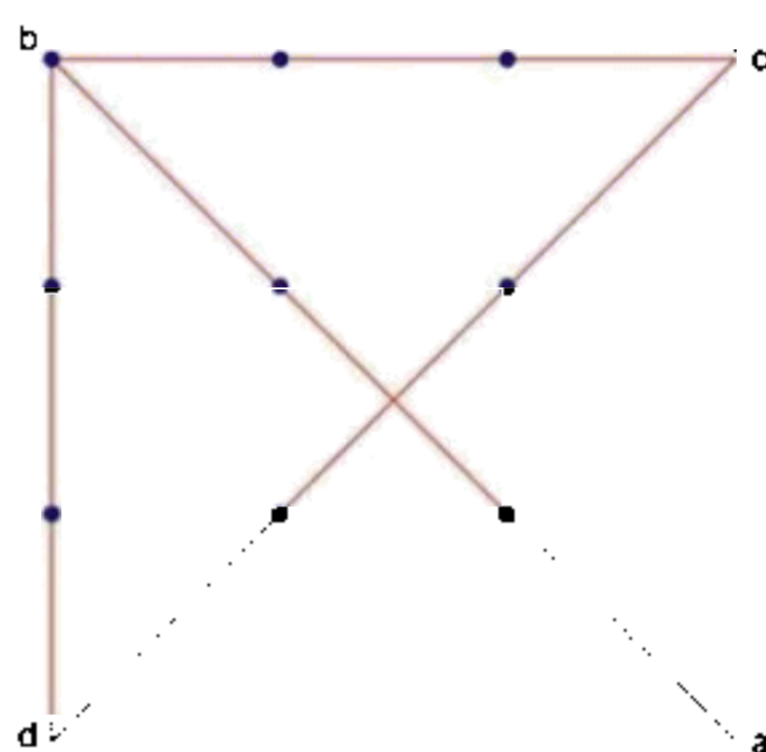
los anuncios están separados $1/6$ de km: 166,67 metros

Pasa, con cuatro trazos rectos continuos, por los nueve puntos de la figura sin levantar el lápiz ni hacer dos veces el mismo trazo.



SOLUCIÓN

Hay que realizar los trazos en el sentido $abcdb$ o cualquier otro similar:



Con cuatro cuatros, y las cuatro operaciones básicas, construye todos los números naturales de uno a diez de manera similar a como se ha construido aquí el cero en estos dos ejemplos.

$$44 - 44 = 0$$
$$4 - 4 + 4 - 4 = 0$$

SOLUCIÓN

Hay varias posibilidades de construcción. Una de ellas es:

$$\frac{44}{44} = 1$$

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2$$

$$\frac{4 + 4 + 4}{4} = 3$$

$$4 + 4 \times (4 - 4) = 4$$

$$\frac{4 \times 4 + 4}{4} = 5$$

$$\frac{4 + 4}{4} + 4 = 6$$

$$\frac{44}{4} - 4 = 7$$

$$4 + 4 + 4 - 4 = 8$$

$$4 + 4 + \frac{4}{4} = 9$$

$$\frac{44 - 4}{4} = 10$$

Santiago tiene un huerto en forma de triángulo equilátero de 200 metros de lado delimitado por tres caminos vecinales.

Ha observado que, regularmente, le roban hortalizas y quiere remediarlo asustando a los ladrones con un perro. Sabe que si el perro aparece en uno de los caminos que bordean el huerto los ladrones se asustarán y huirán.

¿En qué sitio del huerto debe colocar la caseta del perro para que esté en el lugar más óptimo y, así, llegar a cualquiera de los tres caminos lo más rápido posible?



SOLUCIÓN

Si observamos la figura, se colocará la caseta en el lugar P en que $x + y + z$ tenga un valor mínimo.

Ahora bien, al ser un triángulo equilátero, la superficie del

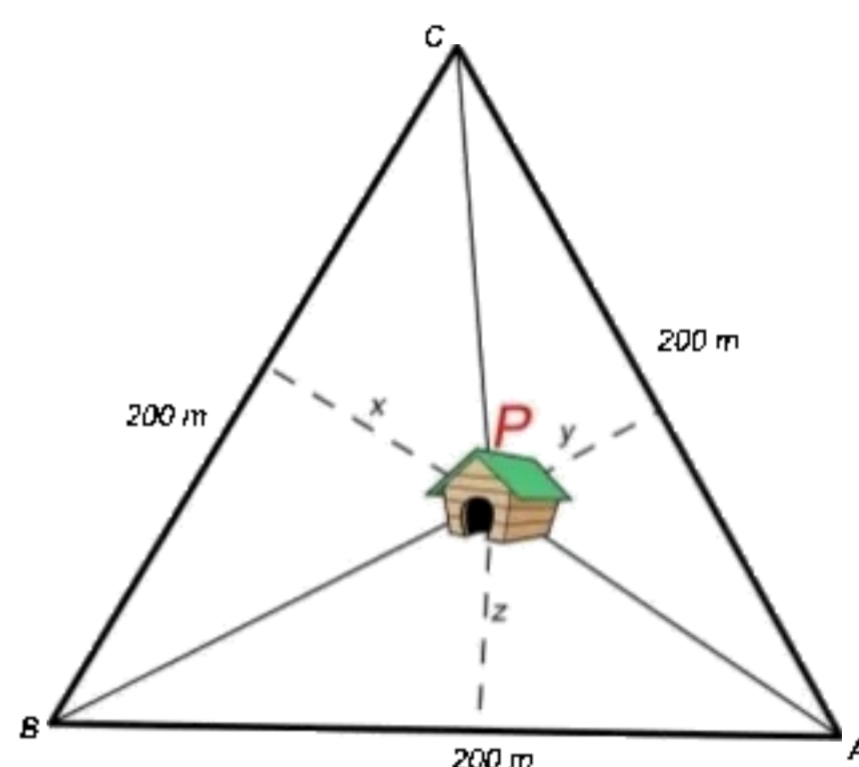
huerto es $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 200^2 = 10000 \times \sqrt{3} \text{ m}^2$. Este valor se

obtiene fácilmente calculando la altura por el teorema de Pitágoras.

Dividiendo el triángulo en los tres que se ven en la figura (construidos con los vértices del triángulo y el punto de ubicación de la caseta), la suma de sus áreas equivaldrá a la superficie de todo el triángulo:

$$\frac{200 \times x}{2} + \frac{200 \times y}{2} + \frac{200 \times z}{2} = 10000 \times \sqrt{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 100 \times (x + y + z) = 10000 \times \sqrt{3} \Rightarrow x + y + z = 100 \times \sqrt{3}$, cantidad fija y equivalente a la altura del triángulo, por lo que



la caseta puede colocarse en cualquier lugar del interior del huerto

¿Cuál es el menor número natural que al dividirlo por 2 se obtenga de resto 1, al dividirlo por 3 se obtenga de resto 2, al dividirlo por 4 se obtenga de resto 3, al dividirlo por 5 se obtenga de resto 4 y al dividirlo por 6 se obtenga de resto 5?



SOLUCIÓN

Llamemos n a ese número. Evidentemente, y según el enunciado, si le añadimos una unidad al número obtendremos todas las divisiones propuestas exactas.

Por lo tanto, el número $n+1$ es divisible por 2, 3, 4, 5 y 6.

Como se pide el menor número que cumple esas condiciones, hallemos el mínimo común múltiplo de los valores anteriores que es $m.c.m(2,3,4,5,6) = 60 = n+1$.

En conclusión,

el número pedido es 59

En las dos orillas de un río hay sendos árboles de 9 y 6 metros de altura, respectivamente, siendo la distancia entre ellos de 15 metros.

En la copa de cada árbol hay una gaviota y de pronto, a la vez y con la misma velocidad, ambas se lanzan a por un pez que ha aparecido en la superficie del río, entre los dos árboles.

Si las dos gaviotas llegan al pez simultáneamente, ¿a qué distancia de cada árbol apareció el pez?



SOLUCIÓN

Observando la figura adjunta vemos que aparecen dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa debe tener el mismo valor por las condiciones del enunciado.

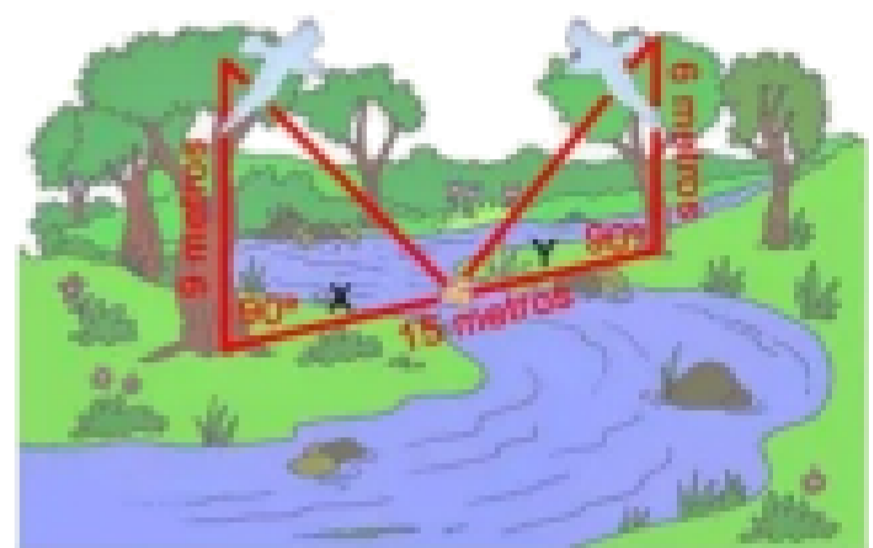
Llamamos X e Y a las distancias que se piden. Se cumple que, por el teorema de Pitágoras, $Y^2 + 6^2 = X^2 + 9^2 \Rightarrow \Rightarrow Y^2 - X^2 = 9^2 - 6^2 = 45 \Rightarrow (Y - X) \times (Y + X) = 45$

Por otro lado, $Y + X = 15$ luego (por la expresión anterior)
 $Y - X = 3$

De ambas ecuaciones se obtiene que $X = 9$ e $Y = 6$

En resumen,

el pez se encuentra a 9 metros del árbol más pequeño y a 6 metros del más grande



Tres congresistas encorbatados, los señores Blanco, Rojo y Verde, se encuentran en un momento de descanso.

Después de saludarse se miran las corbatas y el que lleva la corbata roja dice: “¡Es curioso!: los colores de nuestras corbatas coinciden con nuestros apellidos pero ninguno lleva el color del mismo”.

“¡Cierto!”, apostilla el señor Blanco.

¿Cuál es el color de la corbata que lleva cada uno de ellos?



SOLUCIÓN

Como el que lleva la corbata roja no es el señor Blanco, que hace un comentario posterior, aquél debe ser el señor Verde.

Y no queda más remedio que identificar al señor Blanco con el que lleva la corbata verde y al señor Rojo con el que la lleva blanca.

Concluyendo,

el sr. Blanco lleva la corbata verde, el sr. Rojo la lleva blanca y el sr. Verde la lleva roja

En las antiguas peluquerías y barberías se usaba este poste cilíndrico, formado por bandas rojas, blancas y azules de la misma anchura dispuestas sobre el cilindro en forma helicoidal.

Si el cilindro de la figura mide medio metro de altura y las bandas forman un ángulo de 60° con la horizontal, ¿Cuál es el área ocupada por cada uno de los tres colores?

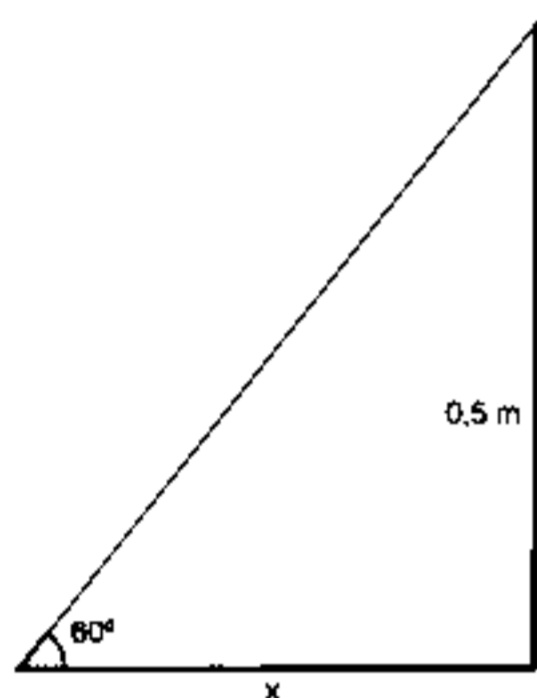


SOLUCIÓN

Si observamos la figura, hay cuatro bandas: dos blancas, una azul y otra roja que se alternan y cubren todo el cilindro.

Para hacer el cálculo correctamente deberemos desarrollar lateralmente el cilindro y observarlo desde una perspectiva plana.

Desarrollando por la línea central, que se observa en la imagen y señala la línea de sombra, vemos que la mayor parte de la banda azul ocupa exactamente la diagonal del rectángulo resultante al desarrollar el cilindro.



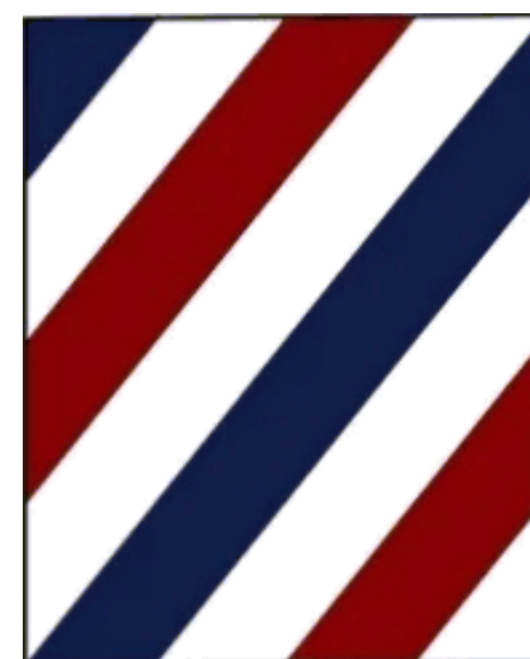
Llamamos x a la anchura del rectángulo del desarrollo lateral y que coincide con el perímetro de la base del cilindro.

Se cumple, por la definición de seno, que

$$\tan 60^\circ = \frac{0,5}{x} \Rightarrow x = \frac{0,5}{\tan 60^\circ} = \frac{0,5}{\sqrt{3}} = 0,2887 \text{ m}$$

Por tanto la superficie lateral del cilindro es $0,2887 \times 0,5 = 0,14435 \text{ m}^2$

Como cada banda es la cuarta parte del rectángulo, tendremos que cada una de las cuatro bandas abarca un área de $\frac{0,14435}{4} = 0,0361 \text{ m}^2$



En suma,

el color rojo y el color azul abarcan una superficie, cada uno, de $0,0361 \text{ m}^2$ y el color blanco el doble: $0,0722 \text{ m}^2$

Dada la sucesión

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 24, ?, 100, 121, 10000

¿cuál es el término que falta?

SOLUCIÓN

Los términos de la sucesión son las expresiones de 16 en los sistemas de numeración 16, 15, 14, ..., 3, 2.

Por lo tanto, el término que falta es la expresión de 16 en la base 5, y es ($16 = 3 \times 5 + 1$):

31

En un cesto hay 1024 bolas, todas con la misma forma y peso excepto una que pesa menos aunque conserva la forma de las demás.

Si tenemos una balanza de dos platos, ¿cuál es la mínima cantidad de pesadas que debemos realizar para localizar la bola diferente?



SOLUCIÓN

Dividimos el número de bolas en tres grupos, de 341, 341 y 342 bolas. Realizando la pesada entre los dos primeros grupos localizaremos en qué grupo está la bola buscada pues si pesan igual la bola estará en el tercer grupo y si pesan diferente la bola estará en el grupo de menor peso.

Tomamos el grupo de menor peso, lo dividimos en grupos de 113 y 114 y repetimos la operación.

Iterando el proceso se obtienen, sucesivamente, grupos de 37 y 38 bolas, de 12 y 13 bolas, de 4 y 5 bolas y, finalmente, de 1 y 2 bolas con los que, a lo sumo, se deberá hacer otra pesada más para determinar la bola aunque, si se produce la localización en un grupo de una bola, no hará falta.

Por lo tanto, el mínimo número, en el mejor de los casos, será

6 pesadas

Tengo un libro en la mesilla para mi habitual lectura nocturna que es muy curioso.

La suma de las cifras del número de la última página de cada capítulo es igual al número de páginas de dicho capítulo y el capítulo más corto tiene siete páginas, comenzando el texto del libro en la página 1.



Si la página 110 pertenece al último capítulo, ¿cuántas páginas y capítulos tiene el libro?, ¿cuál es el capítulo más extenso y cuántas páginas tiene?

SOLUCIÓN

Sea \overline{xyz} el número de la última página de un capítulo cualquiera. Ese capítulo tiene, por tanto, $x + y + z$ páginas, de donde se deduce que la última página del capítulo anterior es

$$\overline{xyz} - (x + y + z) = 100x + 10y + z - x - y - z = 90x + 9y, \text{ múltiplo de } 9$$

De ahí se deduce que todos los capítulos, excepto el último, tienen como número de su última página un múltiplo de 9 y, además, lógicamente tienen también un número de páginas múltiplo de 9

Como la página 110 es del último capítulo (que tiene 7 páginas), el capítulo anterior a él tendrá, como número de su última página, el múltiplo de 9 inmediatamente inferior a 110: 108 y será de $1 + 0 + 8 = 9$ páginas.

Además, el último capítulo acaba en la página $108 + 7 = 115$

Repitiendo el proceso lógico que nos imponen las condiciones del problema podemos deducir, retrocediendo en el libro, que:

- Último capítulo: número de la última página, 115, y páginas, 7
- Capítulo anterior: número de la última página, 108, y páginas, 9
- Capítulo anterior: número de la última página, 99, y páginas, 18
- Capítulo anterior: número de la última página, 81, y páginas, 9
- Capítulo anterior: número de la última página, 72, y páginas, 9
- Capítulo anterior: número de la última página, 63, y páginas, 9
- Capítulo anterior: número de la última página, 54, y páginas, 9
- Capítulo anterior: número de la última página, 45, y páginas, 9
- Capítulo anterior: número de la última página, 36, y páginas, 9
- Capítulo anterior: número de la última página, 27, y páginas, 9
- Capítulo anterior: número de la última página, 18, y páginas, 9
- Capítulo anterior: número de la última página, 9, y páginas, 9

Y ahora estamos en condiciones de responder a lo que se pide:

**es un libro de 115 páginas y 12 capítulos;
el capítulo más extenso es el 10º, de 18 páginas**

Un número natural de tres cifras cumple que

- a) La cifra de las decenas es el triple que la de las centenas
- b) La cifra de las unidades es mayor que la suma de las otras dos
- c) El número es divisible por cada una de las cifras que lo componen

¿De qué número se trata?



SOLUCIÓN

Los únicos números que pueden formarse con las condiciones descritas son 135, 136, 137, 138, 139 y 269

Todos ellos son divisibles por 1, pero solo 135 es divisible por sus otras dos cifras: 3 y 5

Por ello,

el número es el 135

Un coche, siempre a la misma velocidad, pasa por una señal que le indica el kilómetro de la vía por la que transita con un número de dos cifras.

Al cabo de una hora pasa por otra señal que le indica el kilómetro con otro número de dos cifras iguales a las del anterior pero en orden inverso.

Una hora después pasa por una tercera señal que tiene las mismas cifras separadas por un cero.

¿A qué velocidad va el automóvil?



SOLUCIÓN

Llamamos \overline{xy} al número que indica el kilómetro de la primera señal. Entonces, la segunda señal tendrá el número \overline{yx} y la tercera indicará $\overline{x0y}$ con $x = 1$, porque, al llevar una velocidad constante, la diferencia de kilómetros deberá coincidir (: la diferencia entre el kilómetro de la segunda y el de la primera señal debe ser menor que 100 e igual a la diferencia entre el kilómetro de la tercera y el de la segunda señal.

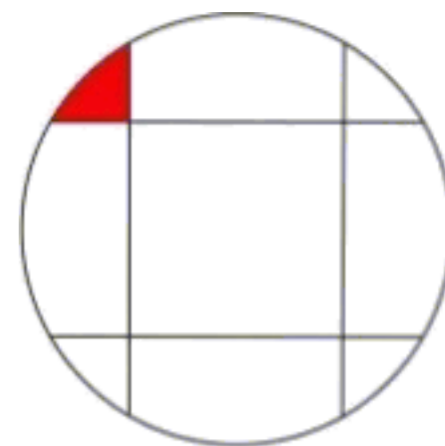
$$\text{Entonces, } \overline{y1} - \overline{1y} = \overline{10y} - \overline{y1} \Rightarrow 10y + 1 - (10 + y) = 100 + y - (10y + 1) \Rightarrow 18y = 108 \Rightarrow y = 6$$

Por consiguiente, los números de kilómetro indicados en el enunciado son 16, 61 y 106, siendo 45 km los que viaja cada hora. De ahí,

el coche va a 45 kilómetros por hora

En la figura, el cuadrado de 1 metro de lado y el círculo de 1 metro de radio son concéntricos.

¿Qué área tiene la parte roja?



SOLUCIÓN

Construimos, en la figura, los elementos geométricos que se ven y nombramos los puntos que nos interesan.

Debemos calcular la superficie S de la sección ABC . Su valor doble será la solución.

Para calcular esa superficie hallaremos el área S_1 del sector circular OBC y le restaremos el área S_2 del triángulo OAC

Según la estructura de la figura, el ángulo $\widehat{DOB} = 45^\circ$ y vemos que el triángulo OCE es equilátero de lado 1 m, por lo que

$\widehat{DOC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{COB} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, por lo que el área del sector es

$$S_1 = \frac{\pi \times 1^2 \times 15}{360} = \frac{\pi}{24} \text{ m}^2$$

Por otro lado, la altura del triángulo OAC es $CD = \frac{1}{2}$ m, siendo la base AC . Hallamos ésta viendo que

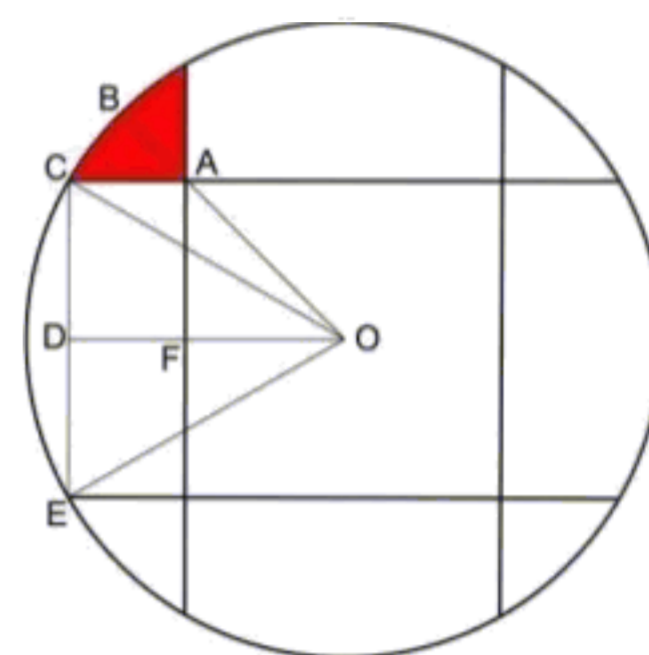
$AC = OD - OF = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ m, pues OD es la altura del triángulo equilátero OCE de 1 m de lado y OF es la mitad del lado del cuadrado.

$$\text{Por tanto, } S_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{8} \text{ m}^2$$

De todo lo anterior se deduce que $S = S_1 - S_2 = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}-1}{8} = 0,03939 \text{ m}^2$

Y, entonces, la superficie pedida (el doble) es

$$\mathbf{0,07878 \text{ m}^2}$$

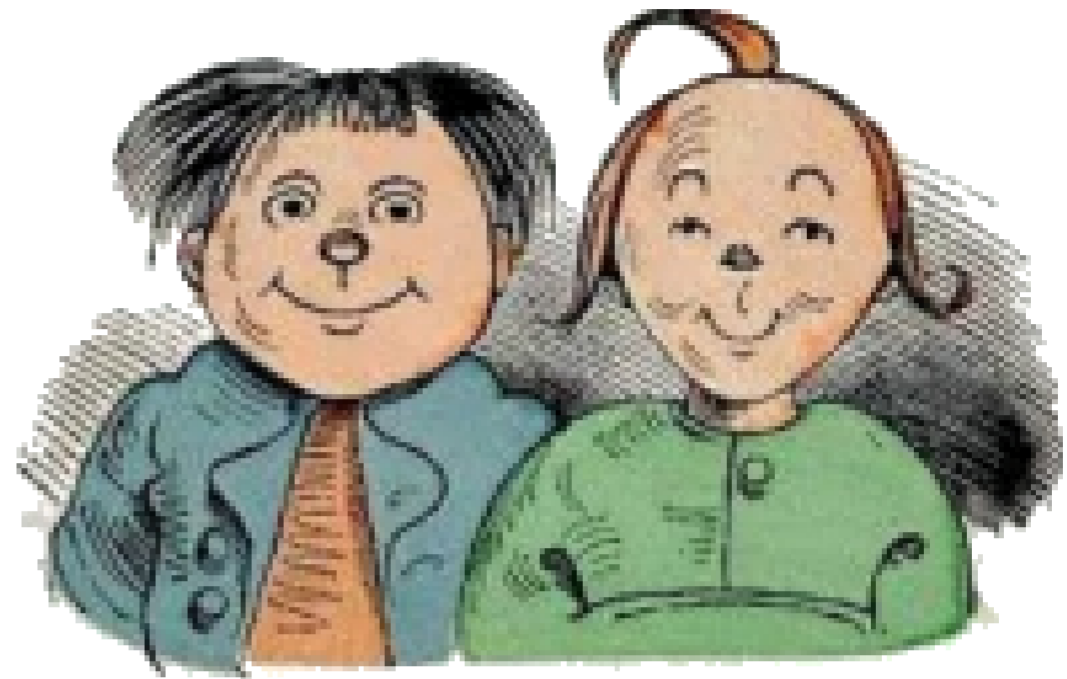


Tavi y Tavo son dos hermanos muy revoltosos que han decidido jugar a mentir en casa, lo que tiene un poco desconcertados a sus padres.

Tavi miente exclusivamente los lunes, martes y miércoles, y Tavo solamente los jueves, viernes y sábados.

Un día los dos tuvieron una charla: “¡Ayer me tocó mentir!” dijo Tavi, a lo que Tavo respondió: “Lo mismo que a mí”.

¿Qué día de la semana tuvo lugar la conversación?



SOLUCIÓN

Evidentemente ese día uno dijo la verdad y otro mintió por lo que se puede descartar el domingo, en el que ambos dicen la verdad y los otros días no son coincidentes respecto a que digan la verdad.

La única posibilidad de día, conforme a la afirmación anterior es que Tavi diga la verdad (*mintió el día anterior*) y Tavo mienta (*mente ese día*), es...

el jueves

¿Qué valores deben tener a y b para que el número $5a21b$ sea múltiplo de 2, 3, 7 y 11?



SOLUCIÓN

Para que sea múltiplo de 2, b debe poder tomar los valores 0, 2, 4, 6 u 8.

En cada uno de los casos, estudiaremos el valor de a para que sea múltiplo de 3 y de 11:

- I- $b = 0$. Para que sea múltiplo de 11, el número debe cumplir: $5 + 2 + 0 - (a + 1) = 6 - a = 0 \Rightarrow a = 6$, pero $5 + 6 + 2 + 1 + 0 = 14 \neq \dot{3}$ por lo que no es múltiplo de 3.
- II- $b = 2$. Para que sea múltiplo de 11, el número debe cumplir: $5 + 2 + 2 - (a + 1) = 8 - a = 0 \Rightarrow a = 8$, y $5 + 8 + 2 + 1 + 2 = 18 = \dot{3}$ por lo que también es múltiplo de 3. Además $58212 = 8316 \times 7 = \dot{7}$, también múltiplo de 7. Este número es una solución del problema.
- III- $b = 4$. Para que sea múltiplo de 11, el número debe cumplir: $5 + 2 + 4 - (a + 1) = 10 - a = 0 \Rightarrow a = 10$, lo cual es imposible, pues a debe ser un dígito.
- IV- $b = 6$. Para que sea múltiplo de 11, el número debe cumplir: $5 + 2 + 6 - (a + 1) = 11 - a = 11 \Rightarrow a = 1$, pero $5 + 1 + 2 + 1 + 6 = 15 = \dot{3}$ por lo que también es múltiplo de 3. Pero $51216 : 7 = 7316,571\dots$, y no es múltiplo de 7.
- V- $b = 8$. Para que sea múltiplo de 11, el número debe cumplir: $5 + 2 + 8 - (a + 1) = 14 - a = 11 \Rightarrow a = 3$, y $5 + 3 + 2 + 1 + 8 = 19 \neq \dot{3}$ por lo que no es múltiplo de 3.

Según lo anterior solamente hay una solución, y es

58212

El número natural 1 tiene la propiedad de ser un cuadrado perfecto y, al sumarle 99, también resulta ser un cuadrado perfecto.

¿Qué números naturales hay, además del 1, que cumplan esa propiedad?



SOLUCIÓN

Llamamos x^2 a los números naturales que pide el enunciado.

Deben cumplir que $x^2 + 99 = n^2$, siendo n otro número natural. Entonces,

$$x^2 + 99 = n^2 \Rightarrow n^2 - x^2 = 99 \Rightarrow (n - x) \times (n + x) = 99 = 1 \times 3^2 \times 11$$

Las posibilidades que se presentan son, teniendo en cuenta que $n + x > n - x > 0$,

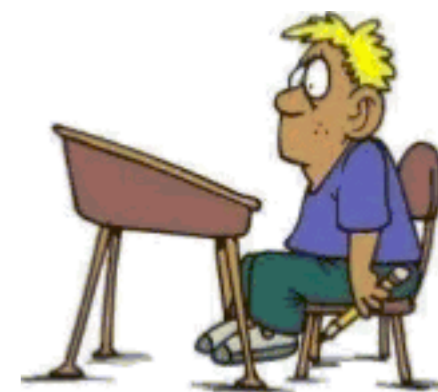
1. $n - x = 1$ y $n + x = 99$, deduciéndose que $n = 50 \Rightarrow x = 49 \Rightarrow x^2 = 2401$
2. $n - x = 3$ y $n + x = 33$, deduciéndose que $n = 18 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow x^2 = 225$
3. $n - x = 9$ y $n + x = 11$, deduciéndose que $n = 10 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$, opción que da el enunciado.

Entonces, los números que cumplen también la propiedad son

225 y 2401

En un examen de 30 cuestiones de opción múltiple se puntúa con 12 puntos cada respuesta correcta, se restan 7 puntos por cada respuesta incorrecta y 0 por cada respuesta en blanco.

Si un participante obtuvo 234 puntos en el examen, ¿cuántas respuestas dejó en blanco?



SOLUCIÓN

Llamamos x al número de respuestas correctas, y al número de incorrectas y z al número de las respuestas en blanco.

Está claro que $x + y + z = 30$ y, además, $12x - 7y + 0z = 234 \Rightarrow 12x - 7y = 234$. Por tanto,

$$12x - 7y = 234 \Rightarrow y = \frac{12x - 234}{7} = x - 33 + \frac{5x - 3}{7}; t = \frac{5x - 3}{7} \Rightarrow x = \frac{7t + 3}{5} = t + \frac{2t + 3}{5}; s = \frac{2t + 3}{5} \Rightarrow$$

$$t = \frac{5s - 3}{2} = 2s - 1 + \frac{s - 1}{2}, \text{ siendo } t \text{ y } s \text{ valores enteros.}$$

Probamos las posibilidades admisibles teniendo en cuenta que debe ser $x + t \geq 33$ para que y no sea negativo.

Si $s = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -30$, lo cual es imposible

Si $s = 3 \Rightarrow t = 6 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow y = -18$, lo cual es imposible

Si $s = 5 \Rightarrow t = 11 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow y = -6$, lo cual es imposible

Si $s = 7 \Rightarrow t = 16 \Rightarrow x = 23 \Rightarrow y = 6$, que es posible. De ahí, $z = 30 - x - y = 30 - 23 - 6 = 1$

Si $s = 9 \Rightarrow t = 21 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow y = 18$, lo cual es imposible, pues el número de respuestas rebasa el de preguntas

... y para valores superiores de s pasaría lo mismo del último caso.

Por tanto,

dejó una respuesta en blanco

En los cuatro últimos exámenes obtuve una media de 8,25 sobre 10.

¿Cuál es la peor nota que pude obtener?



SOLUCIÓN

La peor nota de un examen se debe corresponder con las tres máximas notas para obtener, en conjunto, una media de 8,25 . Si llamamos n a dicha nota, se cumplirá que $\frac{n+10+10+10}{4} = 8,25 \Rightarrow n+30 = 33 \Rightarrow n = 3$

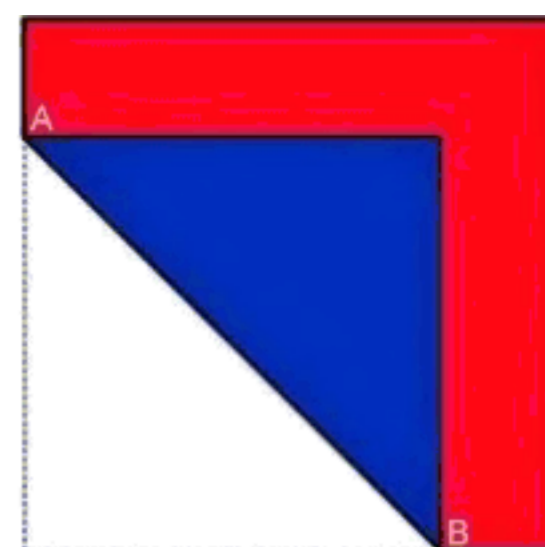
Por tanto,

La peor nota posible es un 3

Un hoja cuadrada de papel de 12 cm^2 de área es roja por una cara y azul por la otra.

Doblamos una esquina de la hoja formando un triángulo con los lados paralelos a los lados de la hoja, como se muestra en la figura.

Si la superficie visible de la hoja es ahora mitad roja y mitad azul, ¿cuál es la longitud del segmento AB?



SOLUCIÓN

El triángulo azul es isósceles y rectángulo. Llamando x al lado de ese triángulo, la superficie roja será la diferencia entre las áreas de la hoja completa y la del cuadrado blanquiazul: $12 - x^2 \text{ cm}^2$

La superficie del triángulo azul es $\frac{x^2}{2} \text{ cm}^2$

Imponiendo la igualdad de áreas, $\frac{x^2}{2} = 12 - x^2 \Rightarrow \frac{3x^2}{2} = 12 \Rightarrow x^2 = 8$

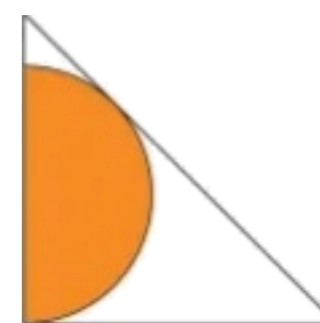
Ahora bien, por el teorema de Pitágoras, $\overline{AB}^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow \overline{AB}^2 = 16 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{16}$

En conclusión,

$$\mathbf{AB = 4 \text{ cm}}$$

Sobre un terreno en forma de triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 10 metros, deseo hacer una piscina de arena semicircular que abarque la máxima superficie posible, como se ve en la figura.

¿Cuál será el radio del semicírculo?



SOLUCIÓN

Llamamos r al radio del semicírculo.

En la figura observamos que los triángulos ABC y DOC son semejantes, al ser ambos rectángulos y un ángulo agudo, al menos, igual: \hat{C}

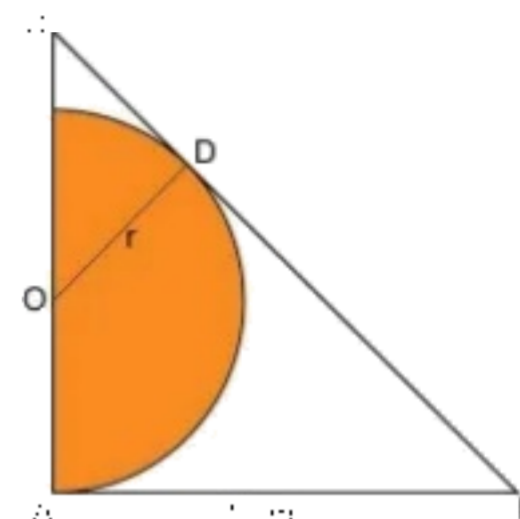
Por tanto, DOC es un triángulo rectángulo isósceles, por lo que sus catetos serán iguales: $\overline{DC} = \overline{OD} = r$

Ahora bien, $\overline{OC} = \overline{AC} - \overline{AO} = 10 - r$ y, por el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} \overline{OC}^2 &= \overline{OD}^2 + \overline{DC}^2 \Rightarrow (10 - r)^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow 100 - 20r + r^2 = 2r^2 \Rightarrow \\ r^2 + 20r - 100 &= 0 \Rightarrow r = -10 \pm \sqrt{200} = 10 \times (-1 \pm \sqrt{2}) \end{aligned}$$

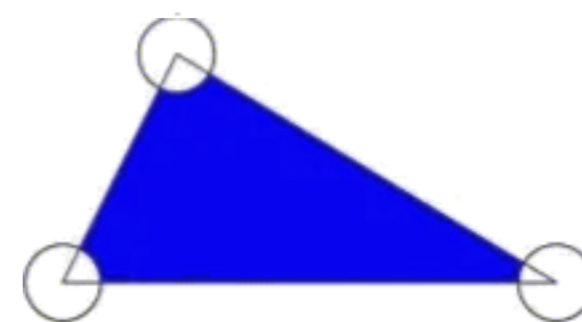
Como debe ser un valor positivo, $r = 10 \times (\sqrt{2} - 1)$, luego

el radio mide 4,14 metros



Sobre un triángulo de 40 cm^2 de área dibujamos, con centros en los vértices, círculos de 2 cm de radio.

¿Qué valor tiene la superficie coloreada de azul, resultante de quitar, al triángulo los sectores circulares que contiene de los tres círculos?



SOLUCIÓN

Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , la superficie de los sectores equivaldrá a la mitad de la superficie de uno de los círculos dibujados.

Por tanto, el área pedida será $40 - \frac{\pi \times 2^2}{2} = 40 - 2\pi \text{ cm}^2$

Es decir,

la superficie azul vale $33,72 \text{ cm}^2$

¿Para que valores enteros de n se cumple que

$$4^{\frac{n-1}{n+1}}$$

es también entero?

SOLUCIÓN

Es claro que $4^{\frac{n-1}{n+1}} = 2^{\frac{2n-2}{n+1}}$, que será un número entero cuando $\frac{2n-2}{n+1}$ sea un entero no negativo.

Como $\frac{2n-2}{n+1} = 2 - \frac{4}{n+1}$, se producirá cuando $|n+1|$ sea divisor de 4 y tal que $\frac{4}{n+1} \leq 2$

Los casos son

$$\text{a) } n+1 = -4 \Rightarrow n = -5 \Rightarrow \frac{n-1}{n+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 4^{\frac{n-1}{n+1}} = 4^{\frac{3}{2}} = 8$$

$$\text{b) } n+1 = -2 \Rightarrow n = -3 \Rightarrow \frac{n-1}{n+1} = 2 \Rightarrow 4^{\frac{n-1}{n+1}} = 4^2 = 16$$

$$\text{c) } n+1 = -1 \Rightarrow n = -2 \Rightarrow \frac{n-1}{n+1} = 3 \Rightarrow 4^{\frac{n-1}{n+1}} = 4^3 = 64$$

$$\text{d) } n+1 = 2 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow \frac{n-1}{n+1} = 0 \Rightarrow 4^{\frac{n-1}{n+1}} = 4^0 = 1$$

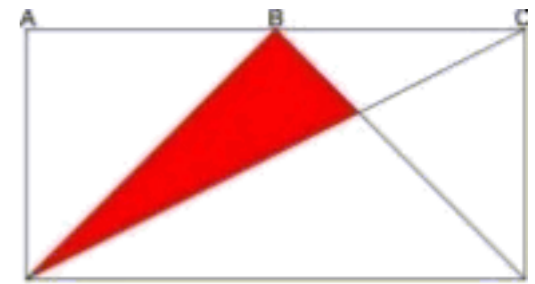
$$\text{e) } n+1 = 4 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4^{\frac{n-1}{n+1}} = 4^{\frac{1}{2}} = \pm 2$$

Es resumen,

n debe ser -5, -3, -2, 1, 3

El rectángulo de la figura tiene 20 centímetros de base y 10 centímetros de altura.

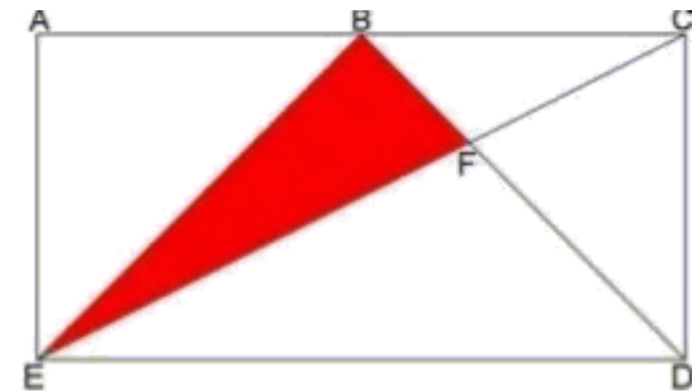
Sabiendo que B es el punto medio de AC, ¿cuál es el valor del área del triángulo rojo?



SOLUCIÓN

El triángulo que CBE tiene de base $\overline{BC} = 10$ cm y de altura $\overline{EA} = 10$ cm por lo que su área es $\text{Área}_{CBE} = \frac{10 \times 10}{2} = 50 \text{ cm}^2$

Por otro lado, los triángulos, opuestos por el vértice, CBF y EDF son semejantes con razón de semejanza $\frac{\overline{CB}}{\overline{ED}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$



Las alturas conservan la razón de semejanza y, como su suma es 10 cm, la altura del triángulo CBF será la tercera parte de la altura del rectángulo: $\frac{10}{3}$ cm. Entonces, $\text{Área}_{CBF} = \frac{10 \times \frac{10}{3}}{2} = \frac{50}{3} \text{ cm}^2$

Por tanto, $\text{Área}_{BEF} = \text{Área}_{CBE} - \text{Área}_{CBF} = 50 - \frac{50}{3} = \frac{100}{3} \text{ cm}^2$

Es resumen,

el área de la región roja es $33,33 \text{ cm}^2$

Halla las tres últimas cifras de

11⁴⁸

SOLUCIÓN

Con el binomio de Newton se soluciona:

$$11^{48} = (10+1)^{48} = \binom{48}{0} \times 10^{48} + \binom{48}{1} \times 10^{47} \times 1 + \dots + \binom{48}{46} \times 10^2 \times 1^{46} + \binom{48}{47} \times 10 \times 1^{47} + \binom{48}{48} \times 1^{48}$$

De ahí, las tres últimas cifras de la potencia se obtendrán de los tres últimos elementos del desarrollo:

$$\binom{48}{46} \times 10^2 \times 1^{46} + \binom{48}{47} \times 10 \times 1^{47} + \binom{48}{48} \times 1^{48} = \frac{48 \times 47}{2} \times 100 + 48 \times 10 + 1 = 112800 + 480 + 1 = 113281$$

por lo que

11⁴⁸ acaba en 281

Un número natural es *supersticioso* si es igual a trece veces la suma de sus cifras.

¿Qué números son *supersticiosos*?



SOLUCIÓN

Evidentemente, no existe ningún número natural de esas características que tenga una sola cifra.

Estudiamos el caso de dos cifras: si \overline{ab} es supersticioso cumplirá que $\overline{ab} = 13 \times (a + b) \Rightarrow \Rightarrow 10 \times a + b = 13 \times (a + b) = 13 \times a + 13 \times b \Rightarrow 3 \times a + 12 \times b = 0$, imposible por tratarse a y b de cifras y, por tanto, números positivos.

Si fuera de tres cifras, $\overline{abc} = 13 \times (a + b + c) \Rightarrow 100 \times a + 10 \times b + c = 13 \times a + 13 \times b + 13 \times c \Rightarrow \Rightarrow 87 \times a - 3 \times b - 12 \times c = 0 \Rightarrow b = 29 \times a - 4 \times c$

Como a , b y c son cifras se deduce que debe ser $a = 1 \Rightarrow b = 29 - 4 \times c$ y las posibilidades que existen son:

- $c = 7 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \overline{abc} = 117$
- $c = 6 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow \overline{abc} = 156$
- $c = 5 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 195$

En caso de cuatro cifras

$\overline{abcd} = 13 \times (a + b + c + d) \Rightarrow 1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d = 13 \times a + 13 \times b + 13 \times c + 13 \times d \Rightarrow 987 \times a + 87 \times b - 3 \times c - 12 \times d = 0$, lo cual es también imposible y, para números de más cantidad de cifras, ocurre lo mismo.

Por lo tanto,

los únicos números supersticiosos son 117, 156 y 195