Introduction à la dynamique des systemes

Trois principes fondamentaux dans la formulation originelle (Newton):

1) chaque corps reste immobile ou se déplace de mouvement rectiligne uniforme s'il n'est pas poussé par des forces (*principe d'inertie* ou *de Galilée*)

2) le changement du mouvement est proportionnel à la force, et il en a la même direction

3) pour chaque action il y a toujours une action égale et contraire, c'est-à-dire, les actions mutuelles que deux corps s'échangent sont égales et dirigées vers directions opposées (*principe d'action et réaction*)

Enegie cinetique, potentielle, travail mécanique

On se propose d’établir les lois fondamentales de la dynamique d’une *particule* ou *point matériel* : un point matériel est mathématiquement représenté par un couple (p, m).

En général en mécanique on considère qu'une force agissant sur un point matériel dépend de la position du point, de sa vitesse et du temps :

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(p, \dot{p}, t)$$

Un exemple de force dépendante de la vitesse
est la résistance à l'avancement d'un corps dans un fluide.

si, toutefois, une force est complètement déterminée par sa seule position,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}\,(p)$$

alors la force est dite *positionnelle*. Des exemples de forces positionnelles sont les forces d'attraction gravitationnelle et celle électrostatique.
On définit *travail mécanique élémentaire* la quantité

$$d\mathcal{L} = \mathbf{f} \cdot dp$$

Un champ positionnel de force est conservatif si la fonction vectorielle **f** = **f**(*p*) qui représente la force coïncide avec le vecteur gradient d'une fonction scalaire *U*, dite *potentiel* de la force

$$\mathbf{f} = \nabla U$$

où l'opérateur différentiel ∇, dit *opérateur nabla*, définit l'opération

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x_i}\mathbf{e}_i = \frac{\partial U}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3}\mathbf{e}_3$$

A remarquer que *U* est défini à une constante additive près. La fonction

$$V = -U$$

est dite *énergie potentielle* ; cette définition n'est pas univoque, car certains auteurs préfèrent définir comme potentiel la fonction *V*, surtout en mécanique des fluides. Pour une force conservative on a

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \mathbf{f} \cdot dp = \int_A^B dU = U_B - U_A$$

En général: $\mathbf{f} \cdot dp = \nabla U \cdot dp = \dfrac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = dU$

Exemples de forces conservatives

Force d'attraction gravitationnelle :

$$\mathbf{f} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{e} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{f} = -mg\mathbf{e}_z$$

$$U = G\frac{Mm}{r} \qquad\qquad U = -m\,g\,z$$

Constante de gravitation universelle : $G = 6.672598\ 10^{-11}\ \mathrm{kg^{-1}m^3s^{-2}}$

Force électrostatique :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qq}{r^2}\mathbf{e}$$

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qq}{r}$$

Permettivité électrique du vide: $\varepsilon = 8.854\ 10^{-12}\ \mathrm{C^2Nm^{-2}}$

Force élastique :

$$\mathbf{f} = -k\,\Delta\ell\,\mathbf{e}$$

$$U = -\frac{1}{2}k\,\Delta\ell^2$$

Couple élastique :

$$\mathbf{M} = -\mu\,\Delta\theta\,\mathbf{e}$$

$$U = -\frac{1}{2}\mu\,\Delta\theta^2$$

Theoreme de l'énergie cinétique

L'*énergie cinétique* d'un point matériel qui a vitesse **v** est définie comme

$$T = \frac{1}{2} m \; \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m \; \mathbf{v}^2 ,$$

et la *puissance* W d'une force **f** appliquée à un point matériel p comme

$$W = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} .$$

Cherchons la variation temporelle de T :

$$\dot{T} = \frac{1}{2} m \, (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) = m \, \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} ;$$

d'ailleurs

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m} ,$$

et donc

$$\dot{T} = m \frac{\mathbf{f}}{m} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = W .$$

Conservation de l'énergie mécanique

a. toutes les n forces actives qui agissent sur p sont conservatives :

$$\mathbf{f}_i^a = \nabla U_i, \quad \forall i = 1,\ldots,n \;;$$

b. toutes les m forces réactives qui agissent sur p ont puissance nulle (c'est-à-dire que les réactions ne font pas de travail mécanique) :

$$\mathbf{f}_j^r \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall j = 1,\ldots, m \;.$$

$$\boxed{\dot{T} = \dot{U} \;\Rightarrow\; (T-U)^{\boldsymbol{\cdot}} = 0 \;\Rightarrow\; T - U = \text{const}}$$

Conservation de la Quantité de Mouvement

$$\mathbf{Q} = m\,\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{Q}} = m\,\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{f}$$

Conservation du Moment de la Quantité de Mouvement

$$\mathbf{K}_o = (p - o) \wedge m\,\mathbf{v}$$ Moment de la Quantité de Mouvement

$$(p - o) \wedge m\,\mathbf{a} = (p - o) \wedge \mathbf{f} = \mathbf{M}_o$$ Moment d’une force

$$\boxed{\dot{\mathbf{K}}_o + \mathbf{v}_o \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}_o}$$

si *O* est le CIR :

$$\boxed{\dot{\mathbf{K}}_o = \mathbf{M}_o}$$