

Correction de l'Épreuve de Thermodynamique II*

Responsable : H. Chaib

Filière : SMP, Semestre : 3, Année : 2017/2018

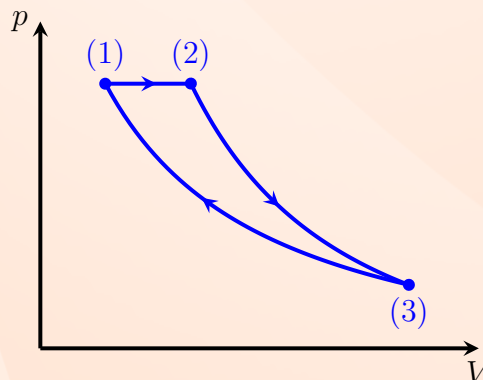
Date : 26-12-2017 à 10:15, Durée : 90 min

Questions de Cours

1. On appelle variables conjuguées, un couple de deux variables vérifiant les propriétés suivantes :
 - l'une est intensive et l'autre extensive ;
 - leur produit est homogène à une énergie.
2. Un gaz semi-parfait est un gaz qui a pour équation d'état $pV = nRT$, mais ses capacités calorifiques C_V et C_p sont des fonctions de la température T (c.-à-d. ne sont pas des constantes).
3. Le postulat de Kelvin relatif au deuxième principe de la thermodynamique est énoncé comme suit : "Il est impossible de prélever une quantité de chaleur d'une source d'énergie et de la transformer intégralement en travail".
4. On distingue trois types de moteurs Stirling : Stirling alpha, Stirling bêta et Stirling gamma.
5. (a) Les composants A et B représentent la soupape d'admission et la soupape d'échappement.
(b) Le composant C représente la bougie qui a pour rôle de produire des étincelles.

Problème 1

1. Représentation du cycle dans le diagramme (p, V) (figure ci-dessous).



*La version électronique de l'énoncé et celle de la correction de cette épreuve seront publiées en ligne, juste après la date/heure affichée ci-dessus, sur le site Web : <http://www.fpo.ma/chaib/teaching/>.

2. Pour l'état (1), on a :

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \quad \text{avec} \quad n = \frac{m}{M} \quad (1)$$

Pour l'état (2), on a :

$$p_2 = p_1 \quad (2)$$

La forme enthalpique du premier principe de la thermodynamique, permet d'écrire :

$$\Delta H_{12} = W_{12} + Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) \quad (3)$$

où $C_p = \frac{7}{2}nR$ car il s'agit d'un gaz parfait diatomique et W_{12} représente le travail technique. Or $W_{12} = \int_{p_1}^{p_2} V dp = 0$, puisqu'il s'agit d'une transformation isobare, alors :

$$Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) \quad (4)$$

d'où :

$$T_2 = \frac{Q_{12}}{C_p} + T_1 \quad (5)$$

et

$$V_2 = \frac{nRT_2}{p_2} \quad (6)$$

Pour l'état (3), on a :

$$T_3 = T_1 \quad (7)$$

car la transformation (3)-(1) est une transformation isotherme. La transformation (2)-(3) est une transformation polytrophe d'indice η , alors $pV^\eta = Cte$, or $p = \frac{nRT}{V}$ alors :

$$TV^{\eta-1} = Cte \quad (8)$$

soit :

$$T_2V_2^{\eta-1} = T_3V_3^{\eta-1} \quad (9)$$

d'où :

$$V_3 = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\eta-1}} V_2 \quad (10)$$

et

$$p_3 = \frac{nRT_3}{V_3} \quad (11)$$

A.N. : $n = 125 \text{ mol}$, $p_1 = 90 \text{ bar}$, $V_1 = 37,301$, $T_1 = 323 \text{ K}$, $p_2 = 90 \text{ bar}$, $V_2 = 39,681$, $T_2 = 343,62 \text{ K}$, $p_3 = 66,05 \text{ bar}$, $V_3 = 50,821$ et $T_3 = 323 \text{ K}$.

3. L'enthalpie de l'état (1) s'écrit :

$$H_1 = U_1 + p_1V_1 \quad (12)$$

La variation de l'énergie interne de la transformation (1)-(2), permet d'écrire :

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1) \quad (13)$$

soit :

$$U_2 = U_1 + C_V(T_2 - T_1) \quad (14)$$

où $C_V = \frac{5}{2}nR$ car il s'agit d'un gaz parfait diatomique. La variation de l'enthalpie de la transformation (1)-(2), permet d'écrire :

$$\Delta H_{12} = H_2 - H_1 = C_p(T_2 - T_1) \quad (15)$$

Alors :

$$H_2 = H_1 + C_p(T_2 - T_1) \quad (16)$$

La transformation (3)-(1) est isotherme, alors $\Delta U_{31} = 0$ et $\Delta H_{31} = 0$. Il en résulte :

$$U_3 = U_1 \quad \text{et} \quad H_3 = H_1 \quad (17)$$

A.N. : $U_1 = U_3 = 250 \text{ J}$, $H_1 = H_3 = 585,68 \text{ kJ}$, $U_2 = 303,57 \text{ kJ}$ et $H_2 = 660,68 \text{ kJ}$.

4. Pour la transformation isobare (1)-(2), on a :

$$\delta W_{12} = V dp = 0 \quad (18)$$

soit :

$$W_{12} = 0 \quad (19)$$

Pour la transformation polytrophe (2)-(3), on a :

$$\delta W_{23} = V dp = \frac{p_2^{1/\eta} V_2}{p^{1/\eta}} dp \quad (20)$$

soit :

$$W_{23} = p_2^{1/\eta} V_2 \int_{p_2}^{p_3} \frac{dp}{p^{1/\eta}} \quad (21)$$

d'où :

$$W_{23} = \frac{p_2^{1/\eta} V_2}{1 - \frac{1}{\eta}} \left(p_3^{1 - \frac{1}{\eta}} - p_2^{1 - \frac{1}{\eta}} \right) \quad (22)$$

or $p_2^{1/\eta} V_2 = p_3^{1/\eta} V_3$, il vient :

$$W_{23} = \frac{\eta}{\eta - 1} (p_3 V_3 - p_2 V_2) \quad (23)$$

Pour la transformation isotherme (3)-(1), on a :

$$\delta W_{31} = V dp = p_1 V_1 \frac{dp}{p} \quad (24)$$

soit :

$$W_{31} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_3} \quad (25)$$

En fin, le travail utile s'écrit :

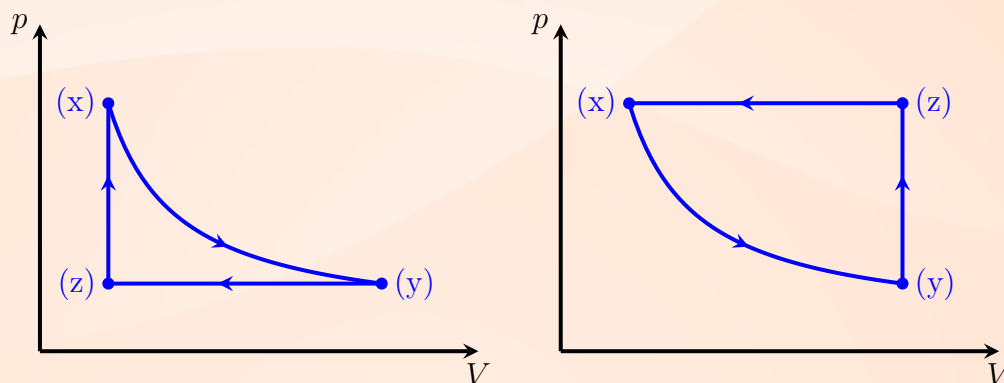
$$W_u = W_{12} + W_{23} + W_{31} \quad (26)$$

A.N. : $W_{12} = 0 \text{ J}$, $W_{23} = -107,14 \text{ kJ}$, $W_{31} = 103,86 \text{ kJ}$ et $W_u = -3,28 \text{ kJ}$.

5. En effet, le cycle de la machine en question évolue dans le sens des aiguilles d'une montre et par suite il s'agit d'une machine thermo-dynamique (c.-à-d. machine thermique motrice) qui fournit du travail. Ainsi, le travail utile W_u de cette machine est négatif.

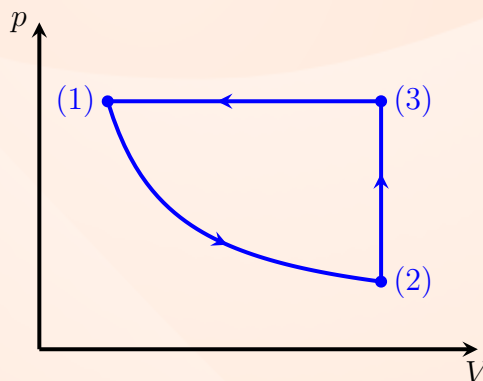
Problème 2

1. Avec une détente isotherme, une compression isobare et une compression isochore, il n'y a que deux configurations possibles pour former un cycle thermodynamique¹ (figure ci-dessous).



Parmi ces deux configurations, c'est la deuxième configuration qui possède une compression isochore suivie d'une compression isobare. Par contre la première configuration ne satisfait pas à ce critère car il possède une compression isobare suivie d'une compression isochore.

Dans la deuxième configuration, l'état le plus comprimé est l'état (x) car il est caractérisé par la plus grande pression et le plus petit volume. Donc l'état (x) représente l'état (1) du cycle en question. Il s'ensuit que l'état (y) représente l'état (2) et l'état (z) représente l'état (3). Cependant, le cycle de la machine en question est représenté sur la figure ci-dessous.



2. On constate que la machine en question est une machine dynamo-thermique car son cycle évolue dans le sens trigonométrique.
3. Le présent cycle est caractérisé par les pressions extrêmes $p_{\min} = 2 \text{ bar}$ et $p_{\max} = 20 \text{ bar}$, et les volumes extrêmes $V_{\min} = 1 \text{ dm}^3$ et $V_{\max} = 9,5 \text{ dm}^3$. Cependant, d'après la figure ci-dessus, il s'avère que :
 - pour l'état (1) : $p_1 = p_{\max}$ et $V_1 = V_{\min}$;

¹On désigne par cycle thermodynamique le cycle d'une machine thermique qui peut être une machine thermo-dynamique ou bien une machine dynamo-thermique. Il est important de noter que :

- le mot thermodynamique (sans -) est général ; par contre
- le mot thermo-dynamique (avec -) est spécifique aux machines motrices ; et
- le mot dynamo-thermique (avec -) est spécifique aux pompes à chaleur y compris les machines frigorifiques.

- pour l'état (2) : $p_2 = p_{\min}$ et $V_2 = V_{\max}$;
- pour l'état (3) : $p_3 = p_{\max}$ et $V_3 = V_{\max}$.

A.N. : $p_1 = p_3 = 20 \text{ bar}$, $p_2 = 2 \text{ bar}$, $V_1 = 1 \text{ dm}^3$ et $V_2 = V_3 = 9,5 \text{ dm}^3$.

4. La variable d'état T est une fonction des variables indépendantes p et V . Alors, sa différentielle dT peut s'écrire :

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V dp + \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV \quad (27)$$

Or, d'après les définitions des coefficients thermoélastiques α et β , à savoir :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (28)$$

on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = \frac{1}{\alpha V} = \frac{p}{nR} \quad (29)$$

et

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = \frac{1}{\beta p} = \frac{V - nb}{nR} \quad (30)$$

alors, en remplaçant $\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V$ dans l'équation (27) par leurs expressions, on obtient :

$$dT = \frac{V - nb}{nR} dp + \frac{p}{nR} dV \quad (31)$$

- Pour $V = Cte$, l'équation (31) s'écrit :

$$dT = \frac{V - nb}{nR} dp \quad (32)$$

Son intégration permet d'écrire :

$$T = \frac{V - nb}{nR} p + f(V) \quad (33)$$

où la constante d'intégration $f(V)$ est une fonction qui peut éventuellement dépendre de V mais elle ne dépend pas de p .

- Pour $p = Cte$, l'équation (31) s'écrit :

$$dT = \frac{p}{nR} dV \quad (34)$$

Son intégration permet d'écrire :

$$T = \frac{p}{nR} V + g(p) \quad (35)$$

où la constante d'intégration $g(p)$ est une fonction qui peut éventuellement dépendre de p mais elle ne dépend pas de V .

Cependant, pour p et V quelconques, on peut écrire :

$$\frac{V - nb}{nR} p + f(V) = \frac{p}{nR} V + g(p) \quad (36)$$

soit :

$$-\frac{nbp}{nR} + f(V) = g(p) \quad (37)$$

ou encore :

$$f(V) = g(p) + \frac{nbp}{nR} = Cte \quad (38)$$

On pose $Cte = T_0$, alors :

$$g(p) = -\frac{nbp}{nR} + T_0 \quad \text{et} \quad f(V) = T_0 \quad (39)$$

d'où l'équation d'état du gaz en question :

$$T = \frac{p(V - nb)}{nR} + T_0 \quad (40)$$

ou aussi :

$$p(V - nb) = nR(T - T_0) \quad (41)$$

5. En considérant la transformation isotherme (1)-(2), on peut écrire :

$$p_1(V_1 - nb) = p_2(V_2 - nb) \quad (42)$$

d'où :

$$nb = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{p_1 - p_2} \quad (43)$$

A.N. : $nb = 5,556 \times 10^{-5} \text{ m}^3$.

6. Déterminons maintenant les travaux et les quantités de chaleur mis en jeu au cours des différentes transformations :

(a) Pour la détente, c.-à-d. la transformation isotherme (1)-(2), on a :

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -nR(T_1 - T_0) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V - nb} \quad (44)$$

soit :

$$W_{12} = -p_1(V_1 - nb) \ln \frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} \quad (45)$$

On a aussi :

$$Q_{12} = -W_{12} \quad (46)$$

car pour cette transformation, qui est isotherme :

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \frac{6}{2}nR(T_2 - T_1) = 0 \quad (47)$$

A.N. : $W_{12} = -4,349 \text{ kJ}$, $Q_{12} = 4,349 \text{ kJ}$.

(b) Pour les deux compressions, on a :

- pour la transformation isochore (2)-(3) :

$$W_{23} = 0 \quad (48)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \Delta U_{23} = U_3 - U_2 = \frac{6}{2}nR(T_3 - T_2) \\ &= \frac{6}{2}nR(T_3 - T_0) - \frac{6}{2}nR(T_2 - T_0) \end{aligned} \quad (49)$$

soit :

$$Q_{23} = \frac{6}{2} (p_3(V_3 - nb) - p_2(V_2 - nb)) \quad (50)$$

ou encore, puisque $V_3 = V_2$:

$$Q_{23} = \frac{6}{2} (p_3 - p_2)(V_2 - nb) \quad (51)$$

- pour la transformation isobare (3)-(1) :

$$W_{31} = -p_1 \int_{V_3}^{V_1} dV = -p_1(V_1 - V_3) \quad (52)$$

On a aussi :

$$Q_{31} = \Delta U_{31} - W_{31} \quad (53)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta U_{31} &= U_1 - U_3 = \frac{6}{2} nR(T_1 - T_3) \\ &= \frac{6}{2} nR(T_1 - T_0) - \frac{6}{2} nR(T_3 - T_0) \end{aligned} \quad (54)$$

c.-à-d. :

$$\begin{aligned} \Delta U_{31} &= \frac{6}{2} (p_1(V_1 - nb) - p_3(V_3 - nb)) \\ &= \frac{6}{2} p_1(V_1 - V_3) \end{aligned} \quad (55)$$

d'où :

$$Q_{31} = \frac{6}{2} p_1(V_1 - V_3) - W_{31} \quad (56)$$

A.N. : $W_{23} = 0$ kJ, $Q_{23} = 51$ kJ, $W_{31} = 17$ kJ et $Q_{31} = -68$ kJ.

7. La machine thermique en question est une machine dynamo-thermique, c.-à-d. une pompe à chaleur. Cette machine peut donc être utilisée soit comme système de refroidissement soit comme système de chauffage. Cependant, son efficacité thermique dépend de son mode d'utilisation :

- (a) En cas d'utilisation comme système de refroidissement :

$$\eta = \left| \frac{Q_f}{W_f} \right| = \left| \frac{Q_{12} + Q_{23}}{W_{31}} \right| \quad (57)$$

car la quantité de chaleur fournie $Q_f = Q_{12} + Q_{23}$ et le travail fourni $W_f = W_{31}$.

A.N. : $\eta = 3,256$.

- (b) En cas d'utilisation comme système de chauffage :

$$\eta' = \left| \frac{Q_c}{W_f} \right| = \left| \frac{Q_{31}}{W_{31}} \right| \quad (58)$$

car la quantité de chaleur cédée $Q_c = Q_{31}$ et le travail fourni $W_f = W_{31}$.

A.N. : $\eta' = 4$.