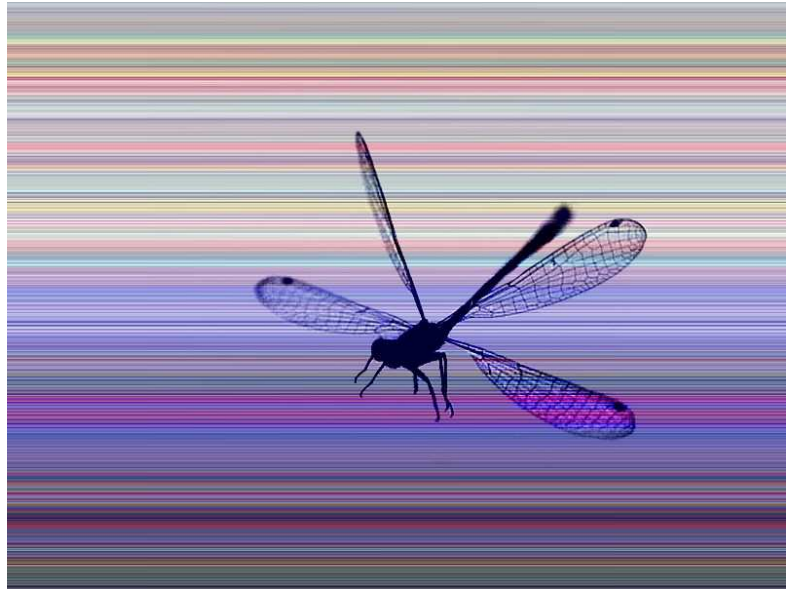


Laurent Jacquin



Mécanique des fluides

Tome 2 : Modèles

DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Mécanique des fluides

Tome 2 : Modèles

Laurent Jacquin

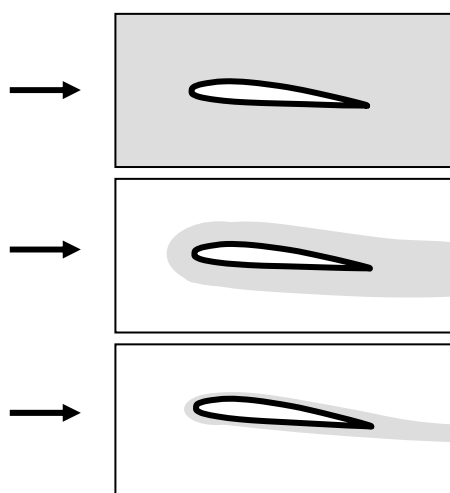
Version provisoire
15 octobre 2014

Couverture

Libellule en vol stationnaire (photo : P. May LMCE - Hôpital Saint-Louis, Paris, 2005 ; effets graphiques : N. Planchard, 2013).

Chapitre 8

Les approximations



Chapitre 8. Approximations	298
8.1 Motivations	298
Les mécanismes.....	299
Les approximations	300
8.2 Analyse d'ordres de grandeur et nombres sans dimension	301
Un « problème guide ».....	301
Les équations sans dimension et les paramètres sans dimension	301
8.3 Le modèle des écoulements de fluide incompressible	308
Le fluide incompressible : définition	308
Conditions de validité.....	308
Nombre de Mach : exemples	310
Les effets de la dilatation thermique	311
Le fluide incompressible : une singularité thermodynamique.....	312
Les équations du fluide newtonien incompressible sans source de chaleur volumique et de chaleur spécifique, de conductivité et de coefficient de viscosité constants	313
Le découplage dynamique / thermique	316
Les équations du fluide newtonien incompressible homogène, de chaleur spécifique, de conductivité et de coefficient de viscosité constants	316
Les conditions aux limites	317
8.4 Le modèle des écoulements de fluide parfait	318
Les écoulements de fluide parfait : définition.....	318
Critère de validité du modèle de fluide parfait	320
Approfondissement * - Nombre de Prandtl : exemples.....	321
Les équations du fluide parfait : les équations d'Euler	322
Autre forme des équations d'Euler	323
Les conditions aux limites	324
8.5 La couche limite : une brève introduction	325
8.6 Écoulements de fluide non pesant.....	327
8.7 Les écoulements sans inertie	328
Le cas des écoulements à très petit nombre de Reynolds	328
Le cas des écoulements unidirectionnels de fluide incompressible	329
Les équations des écoulements sans inertie : cas des écoulements de fluide incompressible homogène avec force extérieure dérivant d'un potentiel	330
Les écoulements sans inertie : applications.....	331
8.8 Les écoulements stationnaires.....	332
Le nombre de Strouhal.....	332
Instationnarités forcées - Instationnarités naturelles	334
Le besoin d'un nouveau modèle : la turbulence	335
Conclusion sur le caractère stationnaire ou instationnaire des écoulements	336
8.9 Résumé des formules essentielles	337

Chapitre 8. Approximations

8.1 Motivations

Comme nous l'avons vu les difficultés que soulève la résolution d'un problème de mécanique des fluides sont de plusieurs ordres :

- ✓ la matière fluide est diverse (fluides classiques, mélanges de phases, milieux dispersés, fluides non newtoniens,...) ;
- ✓ la mécanique des fluides met en jeu un grand nombre de variables et de paramètres. Pour un fluide classique, donc isotrope et newtonien, nous avons dénombré sept variables, $\rho, p, T, u_1, u_2, u_3$ et e , ainsi que trois paramètres, K, η et κ (la conductivité et deux viscosités) ;
- ✓ les équations différentielles du problème reliant ces différentes variables sont non-linéaires.

Il existe quelques solutions analytiques des équations de Navier-Stokes mais elles se limitent à des cas très particuliers. Nous présenterons deux exemples de telles solutions dans le prochain chapitre. Cette complexité générale peut alors amener à penser qu'on ne peut étudier cette science que par voie expérimentale ou numérique. Ce n'est pas faux : la mécanique des fluides est effectivement très gourmande en expériences et en simulations numériques. Mais la simulation expérimentale ou numérique complète et rigoureuse d'un problème complet de mécanique des fluides reste elle-même, généralement, hors de notre portée.

Heureusement, il s'avère que les mécanismes que traduit chaque terme des équations de Navier-Stokes ne sont pas tous à l'œuvre au même endroit et en même temps dans un écoulement, de sorte que l'on peut envisager des simplifications du problème général où l'on ne retiendra que les mécanismes physiques dominants. C'est là que réside le « sel » de la mécanique des fluides : dans la façon de **simplifier ses équations et d'ajuster les méthodes d'investigation, au cas par cas, tout en respectant l'essentiel de la physique.**

C'est à l'apprentissage de ces « principes d'approximation » que se consacre ce chapitre.

$$(8.1.3) \quad \epsilon = \lambda (\operatorname{div} \underline{u})^2 + 2\eta \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}$$

avec λ défini par, cf. (7.2.10) :

$$(8.1.4) \quad \lambda \equiv \kappa - \frac{2}{3}\eta$$

➤ Les approximations

Nous allons simplifier ces équations au moyen d'une **analyse comparative des ordres de grandeur** de leurs différents termes répertoriés dans le tableau précédent. Selon ces ordres de grandeur, les équations peuvent se simplifier. Cela aboutit à la définition des différents **modèles** d'écoulements qui sont listés dans le tableau ci-dessous, et qui correspondent à autant d'**approximations des équations générales**. Un écoulement donné pourra aussi être décrit par les équations correspondantes à une combinaison de ces différentes approximations. Nous allons donc définir dans ce chapitre ces approximations et nous allons examiner les conditions de leur application.

mécanisme négligé	approximations
variation de volume	écoulement de fluide incompressible
frottement conduction rayonnement	écoulement de fluide parfait / couche limite
force extérieure	écoulement sans force extérieure
inertie	écoulement sans inertie (ou écoulement de Stokes)

Tableau 8.2 - Différentes approximations des équations de la mécanique des fluides.

8.2 Analyse d'ordres de grandeur et nombres sans dimension

➤ Un « problème guide »

Pour guider l'analyse des ordres de grandeur des termes qui caractérisent les mécanismes identifiés dans le tableau 8.1, conformément à la figure 8.1 ci-dessous, on considère un problème de type aérodynamique qui est celui d'un écoulement, stationnaire ou instationnaire, autour d'un obstacle rigide fixe de taille caractéristique L , l'écoulement étant caractérisé par un ensemble de conditions aux limites à l'infini amont qui sont celles d'un écoulement uniforme de masse volumique ρ_0 , de pression p_0 , de température T_0 et de vitesse $\underline{u} = U_0 \underline{e}_x$. La paroi de l'objet est supposée isotherme, de température uniforme T_p .

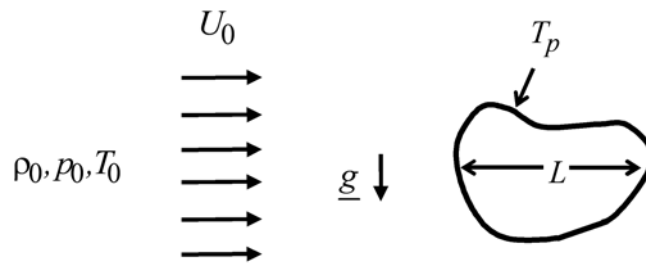


Figure 8.1 - Un « problème guide » pour l'examen des ordres de grandeur des divers termes des équations de Navier-Stokes : l'interaction d'un écoulement avec un objet fixe - Définitions.

Notons qu'un tel problème ne peut pas couvrir tous les cas que l'on peut rencontrer en mécanique des fluides. Mais il constitue une bonne base pour notre propos. Il est constitué par les équations de Navier-Stokes munies des conditions aux limites suivantes :

$$(8.2.1) \quad \begin{cases} \text{pour } \|\underline{x}\| \rightarrow \infty : \underline{u} = U_0 \underline{e}_1, \quad T = T_0 \\ \text{sur la surface de l'objet : } \underline{u} = 0 \text{ (adhérence), } T = T_p \text{ (paroi isotherme)} \end{cases}$$

➤ Les équations sans dimension et les paramètres sans dimension

Pour évaluer l'ordre de grandeur des différents termes des équations du tableau 8.1, on effectue sur l'ensemble de ces équations le **changement de variable** suivant :

$$(8.2.2) \quad \begin{cases} \underline{x} = L \bar{x} \\ t = (L/U_0) \bar{t} \\ \underline{u} = U_0 \bar{u} \\ \rho = \rho_0 \bar{\rho} \\ p = p_0 \bar{p} \\ T = T_0 \bar{T} \end{cases}$$

où les variables « barrées » sont de nouvelles variables de champ. Elles sont **sans dimension** et elles sont supposées d'ordre 1.

Le choix des échelles caractéristiques $(L, U_0, \rho_0, p_0, T_0)$ utilisées dans (8.2.2) pour adimensionnaliser et jauger les différentes variables s'applique au **cas des écoulements de fluide compressible** dans lesquels les variations des grandeurs thermodynamiques peuvent être du même ordre de grandeur que (p_0, T_0, ρ_0) . Cela s'applique donc aux **gaz**. Nous considérons alors quelques hypothèses simplificatrices :

H1 - le fluide est un gaz thermiquement et calorifiquement parfait ;

H2 - la force extérieure est due à la gravité ;

H3 - il n'y a pas de source volumique de chaleur ($r = 0$) ;

H4 - les coefficients de viscosité et de conductivité sont constants ;

H5 - l'hypothèse de Stokes ($\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\eta = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\eta$), cf. (7.6.1), s'applique.

Une autre remarque doit être faite au sujet du choix $t = (L/U_0) \bar{t}$ effectué pour l'échelle de temps en (8.2.2). Ce choix revient à considérer que les deux éléments qui constituent la dérivée particulaire $d(\cdot)/dt = \partial(\cdot)/\partial t + \nabla(\cdot) \cdot \underline{u}$ sont du même ordre de grandeur, à savoir $\tau_0 \equiv L/U_0$ qui est le temps convectif qui caractérise l'advection du fluide à la vitesse U_0 sur une distance correspondant à l'échelle L de l'objet. Ce choix englobe le cas où l'écoulement est stationnaire, auquel cas seul subsiste le second terme de la dérivée particulaire. Il s'applique aussi aux écoulements instationnaires dans la mesure où le temps caractéristique des instationnarités reste de l'ordre du temps convectif (L/U_0) . Nous reviendrons sur ce point lors de l'examen des conditions de validité de l'hypothèse d'écoulement stationnaire.

Dans ce cadre d'hypothèses, les équations à considérer sont, sous leur forme **non-conservative** :

✓ la loi de la conservation de la masse ou équation de continuité, cf. (7.7.1) :

$$(8.2.3) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{u} = 0,$$

✓ la loi de la dynamique, cf. (7.3.6) :

$$(8.2.4) \quad \rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \rho \underline{g} - \underline{\operatorname{grad}} p + \eta \left[\frac{1}{3} \underline{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \underline{u}) + \Delta \underline{u} \right],$$

où l'on a tenu compte des hypothèses, **H2**, **H4** et **H5**,

✓ l'équation de l'énergie, cf. (7.4.10) :

$$(8.2.5) \quad \begin{cases} \rho c_V \frac{dT}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{u} + \epsilon + K \Delta T \\ \epsilon = -\frac{2}{3} \eta (\operatorname{div} \underline{u})^2 + 2\eta \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} \end{cases}$$

qui tient compte des hypothèses **H1** ($e = c_V T, c_V = \text{const.}$) et **H3**. On a aussi tenu compte de l'hypothèse **H5** en posant $\lambda = -\frac{2}{3} \eta$ dans l'expression de la fonction de dissipation (8.1.3).

En appliquant le changement de variables (8.2.2) à ces équations, on obtient un système d'équations sans dimension qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$(8.2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\rho}}{dt} + \bar{\rho} \operatorname{div} \bar{\underline{u}} = 0 \\ \bar{\rho} \frac{d\bar{\underline{u}}}{dt} = -\frac{\bar{\rho} \underline{e}_3}{Fr^2} - Eu \operatorname{grad} \bar{p} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{3} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \bar{\underline{u}}) + \Delta \bar{\underline{u}} \right] \\ \bar{\rho} \frac{d\bar{T}}{dt} = -(\gamma-1) \bar{p} \operatorname{div} \bar{\underline{u}} + \gamma(\gamma-1) \frac{M_0^2}{Re} \bar{\epsilon} + \frac{\gamma}{Pe} \Delta \bar{T} \\ \bar{p} = \bar{\rho} \bar{T} \end{array} \right.$$

Nous allons démontrer cela plus loin. Dans ce système d'équations, par principe, on suppose que tous les termes combinant des variables surlignées sont d'ordre 1. Leur ordre de grandeur est donné par celui des divers facteurs sans dimension $1/Fr^2$, Eu , $1/Re$..., qui les multiplient. Les différents opérateurs différentiels sont aussi supposés sans dimension ; ils ne sont pas surlignés afin d'alléger les notations.

Les conditions aux limites (8.2.1) deviennent pour ce système :

$$(8.2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \bar{x} \rightarrow \infty : \bar{\underline{u}} = \underline{e}_1, \bar{T} = 1 \\ \text{sur la surface de l'objet : } \bar{\underline{u}} = 0 \text{ (adhérence), } \bar{T} = T_p/T_0 \end{array} \right.$$

La démonstration de la forme adimensionnelle de l'équation de continuité, la première équation (8.2.6), est immédiate : le changement de variables (8.2.2) appliqué à (8.2.3) donne :

$$(8.2.8) \quad \left(\frac{\rho_0 U_0}{L} \right) \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\underline{u}} \cdot \operatorname{grad} \bar{\rho} \right) + \left(\frac{\rho_0 U_0}{L} \right) \bar{\rho} \operatorname{div} \bar{\underline{u}} = 0$$

où toutes les dimensions sont rassemblées dans les parenthèses. D'où l'équation cherchée.

Pour la loi de la dynamique sans dimension (deuxième équation (8.2.6)), le changement de variables (8.2.2) appliqué à (8.2.4) donne, si $\underline{g} = -g \underline{e}_3$:

$$(8.2.9) \quad \left(\frac{\rho_0 U_0^2}{L} \right) \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{\underline{u}}}{\partial t} + \nabla \bar{\underline{u}} \cdot \bar{\underline{u}} \right) = -(\rho_0 g) \bar{\rho} \underline{e}_3 - \left(\frac{p_0}{L} \right) \operatorname{grad} \bar{p} + \left(\frac{\eta U_0}{L^2} \right) \left[\frac{1}{3} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \bar{\underline{u}}) + \Delta \bar{\underline{u}} \right]$$

En divisant cette équation par la dimension du premier membre, on obtient :

$$(8.2.10) \quad \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dt} = - \left(\frac{gL}{U_0^2} \right) \bar{\rho} e_3 - \left(\frac{p_0}{\rho_0 U_0^2} \right) \underline{grad} \bar{p} + \left(\frac{\eta}{\rho_0 U_0 L} \right) \left[\frac{1}{3} \underline{grad} (div \bar{u}) + \Delta \bar{u} \right]$$

Les combinaisons des diverses grandeurs à l'intérieur des parenthèses sont maintenant sans dimension. En comparant cette équation avec la deuxième équation (8.2.6) on voit que l'on a introduit les **paramètres sans dimension** définis ci-dessous.

✓ **Le nombre de Froude**

$$(8.2.11) \quad \boxed{Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gL}}}$$

Le carré de ce paramètre, tel qu'il apparaît dans l'équation de la quantité de mouvement (8.2.6), compare l'énergie cinétique $\rho_0 U_0^2$ à l'énergie potentielle de gravitation sur l'échelle caractéristique L , soit $\rho_0 gL$.

✓ **Le nombre d'Euler**

$$(8.2.12) \quad \boxed{Eu = \frac{p_0}{\rho_0 U_0^2}}$$

Ce paramètre compare la pression à l'énergie cinétique. On peut aussi l'écrire sous une forme différente qui sera exploitée plus loin. On introduit pour ce faire la **célérité du son** du gaz thermiquement et calorifiquement parfait (A1.2.33) :

$$(8.2.13) \quad c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}},$$

Cela permet alors d'introduire un autre nombre sans dimension, qui est le **nombre de Mach** :

$$(8.2.14) \quad M_0 = \frac{U_0}{c_0}$$

On obtient :

$$(8.2.15) \quad Eu = \frac{1}{\gamma M_0^2}$$

✓ **Le nombre de Reynolds**

$$(8.2.16) \quad Re = \frac{\rho_0 U_0 L}{\eta} = \frac{U_0 L}{\nu},$$

Conformément à (8.2.9) ce paramètre est une mesure de l'importance relative de l'inertie du fluide, de dimension $\rho_0 U_0^2 / L$, et des forces de viscosité, de dimension $\eta U_0 / L^2$.

Remarque -

Notons bien que le nombre de Reynolds apparaît au **dénominateur** du terme visqueux dans l'équation de la quantité de mouvement sans dimension (8.2.6).

✓ **Le nombre de Péclet**

Ce paramètre sans dimension apparaît dans l'équation de l'énergie du système (8.2.6). Il est obtenu en comparant les transferts de chaleur par convection (premier membre de (8.2.5)) et par conduction (dernier terme de (8.2.5)). La forme complète de l'équation s'établit comme suit.

En introduisant le changement de variables (8.2.2) dans (8.2.5), on obtient tout d'abord :

$$(8.2.17) \quad \begin{cases} \left(\frac{\rho_0 c_V T_0 U_0}{L} \right) \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \underline{\bar{u}} \cdot \underline{\text{grad}} \bar{T} \right) = - \left(\frac{p_0 U_0}{L} \right) \bar{p} \text{div} \underline{\bar{u}} + \left(\frac{\eta U_0^2}{L^2} \right) \bar{\epsilon} + \left(\frac{K T_0}{L^2} \right) \Delta \bar{T} \\ \bar{\epsilon} = -\frac{2}{3} (\text{div} \underline{\bar{u}})^2 + 2 \underline{\bar{d}} : \underline{\bar{d}} \end{cases}$$

D'où :

$$(8.2.18) \quad \begin{cases} \bar{\rho} \frac{d\bar{T}}{dt} = - \underbrace{\left(\frac{p_0}{\rho_0 c_V T_0} \right)}_{\gamma-1} \bar{p} \text{div} \underline{\bar{u}} + \underbrace{\left(\frac{\eta U_0}{\rho_0 c_V T_0 L} \right)}_{\gamma(\gamma-1)M_0^2/\text{Re}} \bar{\epsilon} + \underbrace{\left(\frac{K}{\rho_0 c_V U_0 L} \right)}_{\gamma/\text{Pe}} \Delta \bar{T} \\ \bar{\epsilon} = -\frac{2}{3} (\text{div} \underline{\bar{u}})^2 + 2 \underline{\bar{d}} : \underline{\bar{d}} \end{cases}$$

La forme des deux premiers termes du second membre de l'équation de l'énergie sous sa forme (8.2.6) et telle quelle est donnée sous les accolades ci-dessus, découle alors de l'introduction de la loi d'état thermique du gaz parfait $p_0 = \rho_0 r T_0$, du coefficient adiabatique $\gamma = c_p / c_V$, du nombre de Mach $M_0 = U_0 / c_0$, avec $c_0 = \gamma r T_0$, $r = c_p - c_V$, et du nombre de Reynolds $\text{Re} = \rho_0 U_0 L / \eta$. Le dernier terme de cette équation résulte quant à lui de la relation :

$$(8.2.19) \quad \frac{K}{\rho_0 c_V U_0 L} = \gamma \frac{K / (\rho_0 c_p)}{U_0 L} = \frac{\gamma}{\text{Pe}},$$

qui introduit le **nombre de Péclet** :

$$(8.2.20) \quad \boxed{\text{Pe} = \frac{U_0 L}{\chi}},$$

où :

$$(8.2.21) \quad \chi = \frac{K}{\rho_0 c_p}$$

définit la **diffusivité thermique**. Cette diffusivité a la même dimension qu'une viscosité ($m^2.s^{-1}$).

8.3 Le modèle des écoulements de fluide incompressible

➤ Le fluide incompressible : définition

Définition -

On appelle **écoulement de fluide incompressible**, un écoulement isovolumique, c'est-à-dire un écoulement vérifiant :

$$(8.3.1) \quad \operatorname{div} \underline{u} = 0$$

Propriété -

Conformément à l'équation de continuité (8.2.3), dans un écoulement de fluide incompressible la masse volumique du fluide reste constante le long des trajectoires du fluide :

$$(8.3.2) \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Remarques -

- Par habitude on qualifie d'**incompressible** tout fluide qui se trouve dans la situation où son mouvement n'engendre pas de variation significative de son volume. Cette convention peut donc prêter à confusion car elle mélange la notion de **matière incompressible** (ou plutôt très peu compressible, comme les liquides classiques) avec celle de **matière peu sollicitée en compression** lors de son mouvement. La notion de **fluide incompressible** résulte donc d'une convention de langage.
- Ainsi, comme nous allons le voir ci-dessous, un écoulement de gaz peut être qualifié d'écoulement de fluide incompressible (alors qu'un gaz est, par nature, très compressible) cela dans la mesure où sa vitesse reste petite devant la célérité du son. C'est la condition nécessaire pour que ce gaz soit peu sollicité en compression au cours de son mouvement.
- Un champ qui vérifie (8.3.1) est qualifié de solénoïdal.

➤ Conditions de validité

Nous allons préciser maintenant dans quelles conditions la relation (8.3.1) peut être effectivement appliquée. Il s'agit là d'un point délicat.

Une première condition s'établit en comparant la façon dont la pression produit l'une ou l'autre des deux formes spécifiques de l'énergie qui composent l'énergie totale E : l'énergie interne e et l'énergie cinétique $e_c = \frac{1}{2}u^2$. Dans le cas du « problème guide » considéré jusque-là, conformément à la troisième équation (8.2.6), la production d'énergie

interne par la pression vaut $(\gamma - 1) \bar{p} \operatorname{div} \bar{u}$. Ce terme est d'ordre 1 car les variables « barrées » sont d'ordre 1 et parce qu'il en va de même pour le facteur thermodynamique $(\gamma - 1)$.

Remarque -

Rappelons en effet que pour un gaz parfait le coefficient adiabatique $\gamma = c_p / c_v = 1 + 2/p$ où p désigne le nombre de degrés de liberté de la molécule de gaz, cf. (A1.4.11). On a $p \geq 3$, donc γ est bien d'ordre 1. Par exemple, pour des molécules diatomiques (cas de l'air) on a : $p = 5$, soit $\gamma = 1.4$.

Pour l'énergie cinétique, la contraction de la loi dynamique (deuxième équation (8.2.6)) par la vitesse mène à une production d'énergie cinétique par la pression valant :

$$(8.3.3) \quad \text{Eu} \times \bar{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \bar{p}$$

Compte tenu de ces deux dernières relations, on peut donc écrire :

$$(8.3.4) \quad \frac{\text{production d'énergie interne par la pression}}{\text{production d'énergie cinétique par la pression}} \sim \frac{\gamma - 1}{\text{Eu}} = \gamma(\gamma - 1) M_0^2$$

La dernière égalité tient compte de l'expression (8.2.15) du nombre d'Euler. Donc, la production de l'énergie interne par la pression $-\bar{p} \operatorname{div} \bar{u}$ devient négligeable devant celle de l'énergie cinétique $\bar{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \bar{p}$ quand :

$$(8.3.5) \quad \boxed{M_0^2 \ll 1}$$

Dans cette situation $\operatorname{div} \bar{u}$ est négligeable. La relation ci-dessus est donc une condition nécessaire pour pouvoir considérer le milieu comme incompressible conformément à (8.3.1). On peut interpréter cela en remarquant que dans la limite $M_0^2 = U_0^2 / c_0^2 \rightarrow 0$, l'agitation moléculaire domine entièrement l'énergie de l'écoulement. La célérité du son c_0 qui caractérise la propagation des ondes de compression dans le milieu étant alors

infiniment grande devant la vitesse caractéristique U_0 de l'écoulement, cela contre instantanément toute possibilité d'une variation locale de volume dans l'écoulement.

➤ Nombre de Mach : exemples

Le tableau 8.3 ci-dessous donne quelques valeurs du nombre de Mach dans l'air pour des applications qui relèvent du « problème guide » de la figure 8.1.

Comme indiqué au bas de ce tableau, on peut considérer que la limite extrême de validité du modèle du fluide incompressible correspond à $M_0 \approx 0.3$, soit $M_0^2 \approx 0.1$. Comme nous allons le voir plus bas, l'hypothèse du fluide incompressible permet de simplifier considérablement les équations de la mécanique des fluides, notamment en offrant la possibilité de résoudre le problème dynamique indépendamment du problème énergétique ; c'est pour cette raison pratique que les ingénieurs poussent le critère d'incompressibilité jusqu'à cette limite.

	TGV avion décollage			avion croisière	concorde croisière	navette spatiale
$h(km)$	← 0 →			10	18	100
$T_0(^{\circ}C)$	← 0 →			← -50 →		
$c_0(m.s^{-1})$	← 330 →			← 298 →		
$U_0(m.s^{-1})$	1	10	100	250	596	2980
$U_0(km.h^{-1})$	3.6	36	360	900	2145	10730
M_0	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	0.3	0.8	2	10
M_0^2	10^{-5}	10^{-3}	0.1	0.64	4	100
	isovolumique			masse volumique variable		

Tableau 8.3 - Nombre de Mach pour quelques applications dans l'air. La vitesse du son est évaluée à partir de la température via la formule du gaz thermiquement et calorifiquement parfait $c_0^2 = \gamma_0 r T_0$, cf. (A1.2.33). Les valeurs de T_0 aux diverses altitudes considérées sur la partie droite du tableau sont déduites de la figure caractérisant le modèle d'atmosphère montré sur la figure 2.4 du chapitre 2.

Comme indiqué sur le tableau 8.3, et pour bien fixer les idées, une application emblématique pour laquelle l'hypothèse du fluide incompressible touche sa limite est celle du TGV illustré sur la figure 8.2 ci-dessous. Une autre concerne le cas des avions au décollage.

Remarque –

- Notons toutefois que si l'écoulement autour de la carlingue d'un avion au décollage peut effectivement être encore considéré comme incompressible, il n'en est pas de même de celui à l'intérieur de ses propulseurs qui tournent alors à plein régime.
- Nous utiliserons les données relevées dans le tableau 8.3 au **chapitre 10** lorsque nous étudierons le vol au moyen de la technique de l'analyse dimensionnelle.



Figure 8.2 – L'écoulement autour d'un TGV : la limite extrême de l'hypothèse de fluide incompressible, cf. tableau 8.3.

➤ **Les effets de la dilatation thermique**

Comme rappelé dans l'annexe **A1** du **chapitre 1**, les variations du volume V (ou celles de la masse volumique ρ), de la température T et de la pression p sont reliées par l'équation suivante qui caractérise les propriétés thermoélastiques d'un corps, cf. (A1.1.16) :

$$(8.3.6) \quad \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} = \alpha dT - \chi_T dp ,$$

Ainsi, la compressibilité due aux variations de la pression n'est pas le seul mécanisme qui peut être responsable d'une variation de volume. Il y a aussi les variations de température du fluide. Il faut ainsi considérer que l'échelle δT qui caractérise les variations de la température dans l'écoulement reste suffisamment modérée pour pouvoir supposer que :

$$(8.3.7) \quad \boxed{\alpha |\delta T| \ll 1}$$

où α désigne le coefficient de dilatation thermique isobare, cf. (A1.1.14). En se reportant aux ordres de grandeur de α répertoriés dans le tableau A1.1 de l'annexe A1 du chapitre 1 (à savoir $\alpha \sim 10^{-3} K^{-1}$ dans les conditions ambiantes pour un gaz), cela limite l'échelle de variation de la température $\delta T = |T_p - T_0|/T_0$, où T_p désigne la température de paroi de l'objet de la figure 8.1, à **quelques dizaines de degrés**.

➤ Le fluide incompressible : une singularité thermodynamique

Plusieurs conséquences physiques résultent de l'invariance de la masse volumique des écoulements de fluide incompressible.

✓ Si la masse volumique d'une « particule de fluide » ne varie pas au cours de son mouvement, la **pression thermodynamique** définie en (A1.1.5), **n'est plus définie !**

$$(8.3.8) \quad p = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s \quad \text{- indéfini dans un fluide incompressible}$$

En ce sens, le fluide incompressible apparaît comme une sorte de « singularité thermodynamique ».

✓ Puisque la masse volumique est constante, elle ne joue plus le rôle de variable d'état. La conséquence est qu'il n'y a plus lieu de définir une loi d'état thermique. **C'est la condition $\text{div } \underline{u} = 0$ qui fait alors office de « loi d'état thermique ».**

On conserve par contre une loi d'état calorifique, qui prend la forme $e = e(\rho, T) = e(T)$, d'où l'on déduit **une chaleur spécifique unique**, cf. (A1.1.10), (A1.1.11) :

$$(8.3.9) \quad c = c_p = c_v = \frac{de}{dT},$$

Remarque -

On prendra garde de ne pas confondre la chaleur spécifique c du fluide incompressible avec la célérité du son.

➤ **Les équations du fluide newtonien incompressible sans source de chaleur volumique et de chaleur spécifique, de conductivité et de coefficient de viscosité constants**

La condition d'incompressibilité $M_0^2 \ll 1$, cf. (8.3.5), impose une révision de l'analyse des ordres de grandeur des équations. Cela est dû au fait que le choix de la pression p_0 dans le changement de variables (8.2.2) n'est plus adapté. En effet, les variations de la pression dans un écoulement de fluide incompressible ne sont dues qu'aux variations de la vitesse, et elles sont donc d'ordre $\rho_0 U_0^2$. Cette quantité, qui définit la **pression** dite **dynamique**, est très petite devant p_0 .

Démonstration -

Pour un gaz thermiquement et calorifiquement parfait, donc tel que $p_0 = r \rho_0 T_0$, si l'on introduit de nouveau le nombre de Mach $M_0 = U_0/c_0$ avec $c_0^2 = \gamma r T_0$, on a $\rho_0 U_0^2 = \gamma p_0 M_0^2$. D'où $\rho_0 U_0^2 \ll p_0$ dans la limite incompressible $M_0^2 \ll 1$.

La pression absolue p_0 n'est donc plus l'échelle idoine pour caractériser les variations de la pression dans un écoulement de fluide incompressible, comme nous l'avions posé en (8.2.2). La bonne échelle est $\rho_0 U_0^2$. On posera donc $p = p_0 + \rho U_0^2 \bar{p}$ au lieu de $p = p_0 \bar{p}$. De la même façon, la température T_0 n'est plus la bonne échelle de variation de la température. Dans le cas du « problème guide » de la figure 8.1 où l'on maintient une température de paroi T_p sur la surface de l'objet, on posera $T = T_0 + (T_0 - T_p) \bar{T}$ au lieu de $T = T_0 \bar{T}$. On reprend donc l'analyse des ordres de grandeur des équations générales (8.2.3), (8.2.4) et (8.2.5) dans laquelle on effectue maintenant, en lieu et place de (8.2.2), le changement de variable suivant :

$$(8.3.10) \quad \begin{cases} \underline{x} = L \bar{x} \\ \underline{t} = (L/U_0) \bar{t} \\ \underline{u} = U_0 \bar{u} \\ p = p_0 + \rho U_0^2 \bar{p} \\ T = T_0 + (T_0 - T_p) \bar{T} \end{cases}$$

et où l'on pose $\text{div } \underline{u} = 0$, cf. (8.3.1), et $e = cT + \text{const.}$, cf. (8.3.9). On obtient :

$$(8.3.11) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \rho \underline{g} - \underline{\operatorname{grad}} p + \eta \Delta \underline{u} \\ c \frac{dT}{dt} = \epsilon + K \Delta T \rho \\ \epsilon = 2\eta \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} \end{cases}$$

Compte tenu de (8.3.10) ce système devient tout d'abord :

$$(8.3.12) \quad \begin{cases} \left(\frac{U_0}{L} \right) \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \left(\frac{\rho_0 U_0^2}{L} \right) \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \bar{u} \cdot \bar{u} \right) = -(\rho_0 g) \bar{\rho} \underline{e}_3 - \left(\frac{\rho_0 U_0^2}{L} \right) \underline{\operatorname{grad}} \bar{p} + \left(\frac{\eta U_0}{L^2} \right) \Delta \bar{u} \\ \left(\frac{\rho_0 c U_0 (T_0 - T_p)}{L} \right) \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \bar{T} \right) = \left(\frac{\eta U_0^2}{L^2} \right) \bar{\epsilon} + \left(\frac{K(T_0 - T_p)}{L^2} \right) \Delta \bar{T} \\ \bar{\epsilon} = 2 \bar{\underline{\underline{d}}} : \bar{\underline{\underline{d}}} \end{cases}$$

La mise à l'ordre 1 des premiers membres de ce système mène alors à :

$$(8.3.13) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \bar{\rho} \frac{d\underline{u}}{dt} = -\frac{1}{\operatorname{Fr}^2} \bar{\rho} \underline{e}_3 - \underline{\operatorname{grad}} \bar{p} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \bar{u} \\ \bar{\rho} \frac{d\bar{T}}{dt} = \frac{\operatorname{Ec}}{\operatorname{Re}} \bar{\epsilon} + \frac{1}{\operatorname{Pe}} \Delta \bar{T} \\ \bar{\epsilon} = 2 \bar{\underline{\underline{d}}} : \bar{\underline{\underline{d}}} \end{cases}$$

où apparaît un nouveau nombre sans dimension :

$$(8.3.14) \quad \boxed{\operatorname{Ec} = \frac{U_0^2}{c(T_0 - T_p)}}$$

appelé **nombre d'Eckert**, qui compare l'énergie cinétique spécifique de l'écoulement à la variation de l'énergie interne spécifique.

Si l'on ne fait aucune hypothèse particulière sur les quatre nombres sans dimension Fr , Re , Ec , Pe qui interviennent dans le jeu d'équations sans dimension (8.3.13) on conserve le système d'équations dimensionnel sous sa forme complète, qui est donc valable pour un écoulement de **fluide newtonien incompressible** sans source de chaleur volumique et lorsque la chaleur spécifique c , la conductivité K et la viscosité η peuvent être supposées constantes. Si l'on divise ces équations par la masse volumique, on retiendra donc :

$$(8.3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \underline{u} = 0 \\ \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p + \nu \Delta \underline{u} \\ \frac{dT}{dt} = \frac{2\nu}{c} \underline{d} : \underline{d} + \chi \Delta T \end{array} \right.$$

On a introduit la **viscosité cinématique de cisaillement** :

$$(8.3.16) \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

vue au **chapitre 2**, cf. (2.3.3), ainsi que le coefficient de diffusivité thermique, cf. (8.2.21) :

$$(8.3.17) \quad \chi = \frac{K}{\rho c}$$

Remarques -

- Notons que même si notre démonstration a été menée à partir d'une analyse d'ordres de grandeur du cas d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait, les équations (8.3.10) obtenues ci-dessus pour $\text{div } \underline{u} = 0$ sont valables autant pour un gaz que pour un liquide newtonien.
- Rappelons aussi que la viscosité dynamique de cisaillement η caractérise la force de frottement dans la loi de la dynamique. Une fois divisée par la masse volumique, le coefficient obtenu $\nu = \eta/\rho$ caractérise maintenant l'effet du frottement sur le champ des vitesses ; d'où cette dénomination de viscosité **cinématique** (qui a trait au champ des vitesses), et non plus **dynamique** (qui a trait au champ des accélérations).

➤ **Les équations du fluide newtonien incompressible homogène, de chaleur spécifique, de conductivité et de coefficient de viscosité constants**

La notion supplémentaire rajoutée ici est celle du **fluide homogène**. L'équation de continuité du cas précédent nous dit en effet que la masse volumique est constante sur les trajectoires ($d\rho/dt = -\rho \operatorname{div} \underline{u} = 0$, cf. (8.3.2)). Dans le cas où la masse volumique n'est pas seulement constante le long de chaque trajectoire individuelle, mais constante partout dans l'espace, soit si :

$$(8.3.18) \quad \rho = \text{const.}$$

Puisque dans un écoulement de fluide incompressible la masse volumique reste constante le long de chaque trajectoire, si l'écoulement est homogène à l'instant initial, il le reste à tout instant et la masse volumique demeure la même au cours du temps.

Les équations ci-dessus restent inchangées, mise à part que l'on peut rentrer la masse volumique dans le gradient de pression de l'équation de la dynamique. On obtient le système :

$$(8.3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{g} - \underline{\operatorname{grad}} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \underline{u} \\ \frac{dT}{dt} = \frac{2\nu}{c} \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} + \chi \Delta T \end{array} \right.$$

Par ailleurs, la diffusivité thermique (8.3.17) devient aussi une constante, au même titre que c et K .

➤ **Le découplage dynamique / thermique**

On note que dans l'équation de la température des systèmes (8.3.15) et (8.3.19), la production $-p \operatorname{div} \underline{u}$ par le travail des forces de volume a disparu. Dans un écoulement de fluide incompressible, le mouvement ne peut donc chauffer le fluide que par frottement. Pour un gaz ou un liquide classique en régime incompressible ce chauffage est généralement faible, de sorte que l'invariance supposée des coefficients physiques c, K, η

vis-vis de la température est légitime. On voit alors que dans le cas d'un écoulement de fluide incompressible homogène, puisque ρ et $\nu = \eta/\rho$ ne varient pas sur les trajectoires du fluide, la détermination du champ de pression p et celui de la vitesse \underline{u} ne **fait pas intervenir la température** ; elle ne s'effectue qu'à partir de l'équation de la continuité et de la loi de la dynamique.

L'équation de l'énergie interne permet alors de déterminer la température une fois connue la distribution des vitesses qui intervient dans le terme de production de chaleur par dissipation visqueuse $2\eta \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}$ ainsi que dans le terme d'advection $\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} T$ de la dérivée particulaire dT/dt . Cette étape n'est nécessaire que si l'on désire examiner les aspects thermiques du problème.

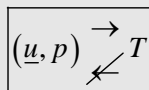
On retiendra donc cette propriété importante :

Les écoulements de fluide incompressible homogène : le découplage dynamique / thermique -

Dans un écoulement de fluide newtonien incompressible homogène dans lequel le coefficient de viscosité dynamique de cisaillement η peut être considéré comme constant, le problème dynamique (détermination de (\underline{u}, p)) est indépendant du problème thermique (détermination de T). Le problème thermique reste quant à lui dépendant du problème dynamique.

On peut résumer cela comme suit :

Écoulements de fluide incompressible homogène de viscosité constante ($\text{div } \underline{u} = 0, \eta = \text{const.}$)



➤ **Les conditions aux limites**

Les conditions aux limites du modèle d'écoulement de fluide incompressible sont identiques à celles du système des équations de Navier-Stokes. Pour le « problème guide » de la figure 8.1, ce sont les conditions données en (8.2.1).

8.4 Le modèle des écoulements de fluide parfait

➤ Les écoulements de fluide parfait : définition

La deuxième approximation listée sur le tableau 8.2 est celle du **fluide parfait**. Comme nous l'avons vu au **chapitre 5**, un écoulement de fluide parfait est défini comme un écoulement dans lequel il n'y a **pas de source d'entropie, ni réversible, ni irréversible**. Rappelons le raisonnement que nous avons fait alors. A partir des lois fondamentales établies avant d'introduire la loi de comportement newtonienne, nous avons obtenu l'équation (5.7.7) qui identifiait les deux sources possibles d'entropie :

$$(8.4.1) \quad \begin{cases} \text{réversible: } \mathcal{S}_{s_e} = \frac{r}{T} - \operatorname{div} \left(\frac{\underline{q}}{T} \right) \\ \text{irréversible: } \mathcal{S}_{s_i} = \frac{\epsilon}{T} - \frac{\underline{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2} \geq 0 \end{cases}$$

Ces relations sont reprises dans le tableau 8.1. La forme générale de la fonction de dissipation visqueuse ϵ avait été donnée en (5.3.14), à savoir :

$$(8.4.2) \quad \epsilon = {}^t \underline{\underline{\tau}} : \nabla \underline{u},$$

Sa forme newtonienne est rappelée ci-dessus, en (8.1.3). Cela nous amène à la définition suivante du fluide parfait :

Écoulement de fluide parfait – définition

Un écoulement de fluide parfait est un écoulement **adiabatique** et **réversible**, tel que :

$$(8.4.3) \quad r = 0, \underline{q} = 0, \underline{\underline{\tau}} = 0$$

Les trois conditions (8.4.3) éliminent le frottement dans la loi dynamique ainsi que les trois derniers termes de l'équation de l'énergie du tableau 8.1.

Conformément à (8.4.1) et (8.4.2), les deux premières hypothèses, $r = 0$, $\underline{q} = 0$, assurent que l'écoulement de fluide s'effectue de manière adiabatique ($\mathcal{S}_{s_e} = 0$) ; les deux dernières, $\underline{q} = 0$, $\underline{\tau} = 0$, éliminent quant à elles la production irréversible ($\mathcal{S}_{s_i} = 0$). Nous retrouvons bien ici la définition du fluide parfait donnée dans le **chapitre 5** qui est celle d'un **écoulement adiabatique réversible**, cf. (5.8.4) et (5.8.5).

Dans un tel écoulement l'entropie est conservée le long des trajectoires de l'écoulement, ce qui s'exprime, par l'équation :

$$(8.4.4) \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{-isentropique}$$

qui définit, comme vu au **chapitre 5**, les écoulements **isentropiques**, cf. (5.8.1). Les écoulements de fluide parfait sont donc isentropiques. Mais comme vu aussi au **chapitre 5**, un écoulement isentropique peut être le siège d'une production interne irréversible d'entropie par frottement et par conduction s'il peut évacuer cette entropie sous la forme d'un flux de chaleur, donc si $\mathcal{S}_{s_e} = -\mathcal{S}_{s_i}$, cf. (5.8.2). On avait illustré cela par l'exemple de l'écoulement stationnaire dans une conduite dans l'approfondissement à la fin du **chapitre 5**, cf. figure 5.3. L'hypothèse du fluide parfait est donc plus exigeante que l'isentropie car elle interdit individuellement chacun de ces deux mécanismes, le frottement et la conduction (ainsi que le refroidissement ou le réchauffement par une source de chaleur volumique). Un écoulement de fluide parfait est donc un écoulement adiabatique réversible : à la fois isentropique, tel que $\mathcal{S}_{s_i} = 0$, et adiabatique, tel que $\mathcal{S}_{s_e} = 0$. Cela est bien assuré par les trois conditions (8.4.3).

Comme vu aussi au **chapitre 5**, dans le cas où un tel écoulement peut être également considéré comme **permanent**, il est alors **isoénergétique**, c'est à dire que sa charge totale H , qui est égale à la somme de toutes les formes d'énergies présentes dans l'écoulement, cf. (5.5.4), demeure constante au cours du mouvement, cf. (5.5.20) :

$$(8.4.5) \quad \frac{dH}{dt} = \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} H = 0 \quad \text{-isoénergétique}$$

➤ **Critère de validité du modèle de fluide parfait**

Conformément aux trois conditions (8.4.3) qui définissent le fluide parfait, on pourrait être tenté de définir **physiquement** ce fluide comme un fluide particulier qui serait non conducteur de la chaleur et exempt de frottement. Pour un fluide newtonien, cela reviendrait à imaginer un fluide non-visqueux, tel que $\kappa = \eta = \lambda = 0$, et non conducteur, tel que $K = 0$.

Remarque -

C'est ce que suggère d'ailleurs la littérature de langue anglaise où le fluide parfait est généralement désigné par l'expression « *inviscid (or non-viscous) and non-heat-conducting fluid* ».

Mais tous les fluides sont visqueux et conduisent la chaleur. Le fluide parfait est donc un **modèle** qui traduit le comportement d'un fluide réel dans des circonstances où les conditions (8.4.3) sont vérifiées. Nous connaissons déjà les conditions dans lesquelles on peut **négliger le frottement visqueux** (devant l'inertie). Il faut pour cela que le nombre de Reynolds soit grand, cf. (8.2.16) :

$$(8.4.6) \quad \boxed{\text{Re} = \frac{U_0 L}{\nu} \gg 1}$$

Dans le problème modèle analysé ci-dessus, cette condition permet bien d'éliminer les termes visqueux dans l'équation de bilan de la quantité de mouvement et dans celle de l'énergie du système sans dimension (8.2.6).

Par ailleurs, pour que le fluide puisse être considéré comme exempt aussi d'effets de **conduction**, il faut comparer maintenant les effets de la diffusion de la chaleur par conduction thermique à ceux de l'advection de la chaleur dans l'équation de l'énergie interne. Conformément à (8.2.6), cela correspond à une grande valeur du nombre de Péclet, cf. (8.2.20) :

$$(8.4.7) \quad \boxed{\text{Pe} = \frac{U_0 L}{\chi} \gg 1}$$

On note alors que le rapport entre le nombre de Péclet et le nombre de Reynolds se ramène à celui entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique. Ce rapport définit le **nombre de Prandtl** :

$$(8.4.8) \quad \boxed{\text{Pr} = \frac{\text{Pe}}{\text{Re}} = \frac{\nu}{\chi}}$$

On pourra alors considérer dans l'équation de l'énergie interne le nombre de Péclet comme le produit entre le nombre de Prandtl et le nombre de Reynolds. La conduction thermique dans un écoulement peut donc être négligée dans la mesure où :

$$(8.4.9) \quad \boxed{\text{Pe} = \text{Pr} \times \text{Re} \gg 1}$$

Comme nous le montrons dans un approfondissement ci-après, dans la plupart des applications usuelles le nombre de Prandtl peut être considéré comme étant au moins d'ordre 1. Il n'est par ailleurs jamais « très grand » pour les fluides classiques.

Dans ces conditions, **le critère de validité de l'approximation du fluide parfait peut donc se résumer à la condition (8.4.6) sur le nombre de Reynolds.**

➤ **Approfondissement * - Nombre de Prandtl : exemples**

Quelques valeurs caractéristiques du nombre de Prandtl sont données dans les deux tableaux ci-dessous.

	$\rho (kg \cdot m^{-3})$	$K (W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$	$\eta (kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1})$	$c_p (J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1})$	$\chi (m^2 \cdot s^{-1})$	$\nu (m^2 \cdot s^{-1})$	Pr
air (0°)	1.293	0.024 peu conducteur	1.7210^{-5} peu visqueux	1000	1.8610^{-5}	1.3310^{-5}	0.715
eau (20°)	998	0.62 bon conducteur	1.00510^{-3} visqueux	4180	1.4810^{-7}	1.00710^{-6}	6.80
glycérine (0°)	1260	0.267 bon conducteur	1.210^{-2} très visqueux	2260	0.93710^{-7}	0.9510^{-5}	101.4
huiles moteur							$10^2 - 10^4$

Tableau 8.4 - Nombre de Prandtl $\text{Pr} = \nu/\chi$: exemples.

$T(K)$	200	240	280	300	320	340	380
$T(^{\circ}C)$	-73	-33	7	27	47	67	87
air	0.738	0.724	0.710	0.705			
eau			10.3	5.69	3.65	2.60	1.59

Tableau 8.5 - Valeurs du nombre de Prandtl $Pr = \nu/\chi$ en fonction de la température pour l'air et l'eau à 1bar.

Commentons brièvement ces tableaux :

✓ Dans les applications, on peut être amené à favoriser le transfert de chaleur tout en minimisant les pertes par frottement. On utilisera alors un fluide à faible nombre de Prandtl (un gaz par exemple). Si l'on veut par contre réduire le transfert de chaleur tout en assurant une grande viscosité, comme par exemple en lubrification, on utilisera des fluides à grand nombre de Prandtl, comme les huiles de moteurs.

✓ Comme le montrent les valeurs obtenues pour l'air dans le tableau **8.4** (on retiendra pour l'air la valeur $Pr \approx 0.7$), le Pr est proche de l'unité pour les gaz. On voit aussi dans le tableau **8.5** que ses variations avec la température sont faibles. Tout cela reflète le fait que la viscosité et la conduction de la chaleur s'effectuent dans un gaz par le biais d'un seul et même mécanisme, le choc des molécules. Les différences d'un gaz à l'autre restent alors petites. Comme vu au **chapitre 1**, elles traduisent la nature plus ou moins complexe des molécules et de leurs différents modes d'énergie (rotation, vibration...).

✓ Les valeurs du Pr sont plus grandes pour les liquides. On observe dans le tableau **8.4** que Pr est d'autant plus grand que le liquide est "huileux". Mais, mis à part pour des cas particuliers comme celui des huiles synthétiques utilisées dans les moteurs, on peut considérer que ce nombre sans dimension n'est jamais « très grand ». On notera alors dans le tableau **8.5** la forte décroissance du nombre de Prandtl de l'eau en fonction de la température. Cela provient, pour l'essentiel, de la diminution de la viscosité avec la température qui caractérise les liquides chauffés du fait de l'affaiblissement de leurs forces potentielles internes cohésives lorsque l'agitation thermique augmente. Cela a été discuté au **chapitre 2** (cf. tableau **2.2**). C'est pour cette raison qu'il faut s'arrêter d'urgence quand la jauge thermique d'une automobile indique que l'huile dépasse sa température critique : le moteur n'est plus convenablement lubrifié.

➤ Les équations du fluide parfait : les équations d'Euler

Dans le cadre de l'hypothèse du fluide parfait, c.-à-d. quand $Re \gg 1$, on peut donc éliminer du jeu d'équations sans dimension (**8.2.6**) les termes de frottement ainsi que les termes de diffusion par conduction (puisque $Pe = Pr \times Re \gg 1$). Les équations de Navier-Stokes dimensionnelles se réduisent alors au système suivant :

(8.4.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \rho \underline{f} - \underline{\operatorname{grad}} p \\ \rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{u} \\ p = p(\rho, T) \\ e = e(\rho, T) \end{array} \right.$$

Ces équations sont appelées **équations d'Euler**.

➤ **Autre forme des équations d'Euler**

Une autre formulation de ces équations, qui privilégie la dynamique, consiste à remplacer l'équation de l'énergie par une équation pour la pression. On considère pour cela la loi d'état $p = p(s, \rho)$, ce qui, dans le cas d'un écoulement **isentropique**, mène à :

(8.4.11)

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{ds}{dt} = \frac{Ks}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}$$

Dans cette équation, nous avons introduit le **module d'élasticité adiabatique** K_s , cf. (A1.1.21), et la **célérité du son** c , cf. (A1.1.22). Les équations d'Euler deviennent :

(8.4.12)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \rho \underline{f} - \underline{\operatorname{grad}} p \\ \frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} \\ p = p(\rho, T) \\ e = e(\rho, T) \end{array} \right.$$

Ce sont ces équations que l'on utilise en particulier pour établir les lois de l'**acoustique linéaire**.

➤ Les conditions aux limites

Puisqu'elles ne tiennent plus compte des mécanismes moléculaires responsables du frottement et de la conduction, les conditions aux limites du fluide parfait sont différentes de celles des équations fondamentales de départ. On se limitera de nouveau au cas d'une **surface imperméable** représentant, soit la **surface d'un solide déformable**, soit une **interface entre deux fluides non miscibles**.

Dans le fluide parfait, la condition d'adhérence (7.8.5) et la condition de non-glissement (7.8.17) n'ont plus lieu d'être. Elles doivent être remplacées par les conditions suivantes.

✓ Sur une **surface solide** on doit maintenant appliquer la **condition d'imperméabilité**, cf. (7.8.4) :

$$(8.4.13) \quad \underline{u} \cdot \underline{n} = \underline{U} \cdot \underline{n}$$

où \underline{U} désigne la vitesse de déplacement de la surface du solide déformable, cf. figure 7.1, et \underline{u} , la vitesse locale du fluide sur la surface. Dans le cas du « problème guide » de la figure 8.1, cette condition permet de matérialiser l'objet sans imposer la valeur de la vitesse. L'objet devient alors une surface de courant particulière. On démontre que cette condition suffit à déterminer le champ des vitesses à partir des équations d'Euler. Par ailleurs, comme précisé au chapitre 7 sur une surface solide **aucune condition dynamique** ne peut être prescrite.

✓ Sur une **interface entre deux fluides non-miscibles**, il faut maintenant appliquer la **condition de non-miscibilité** (7.8.11) :

$$(8.4.14) \quad \underline{u}_1 \cdot \underline{n} = \underline{u}_2 \cdot \underline{n} = \underline{W} \cdot \underline{n}$$

Par ailleurs, la **condition cinématique** (7.8.16) s'applique :

$$(8.4.15) \quad \left(\frac{dF}{dt} \right)_1 = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{u}_1 \cdot \underline{\text{grad}} F = \left(\frac{dF}{dt} \right)_2 = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{u}_2 \cdot \underline{\text{grad}} F = 0$$

Rappelons que dans ces relations, \underline{W} désigne la vitesse de déplacement de la surface $\Sigma(t)$ d'équation $F(\underline{x}, t) = 0$ qui sépare les deux fluides non-miscibles, cf. figure 7.1(b), et \underline{u}_1 et \underline{u}_2 sont les vitesses locales des fluides de part et d'autre de cette surface.

Quant à la **condition dynamique** (7.8.20) ou (7.8.21), puisque $\underline{\tau} = 0$, elle se ramène à l'égalité des pressions (en l'absence d'effet de tension superficielle) :

$$(8.4.16) \quad p_2 = p_1$$

✓ Les conditions thermiques

Le fluide parfait ne conduisant pas la chaleur, **aucune condition thermique ne peut être imposée.**

8.5 La couche limite : une brève introduction

Dans le tableau récapitulatif des différents modèles 8.2 on aura noté que nous avons couplé le modèle du fluide parfait avec une autre notion, celle de la couche limite. Nous allons expliquer cela ici.

Nous venons de voir que dans le cas du « problème guide » de la figure 8.1, la seule condition aux limites sur la vitesse qui subsiste dans le modèle de fluide parfait est la condition de glissement (8.4.13). L'objet étant au repos, elle s'exprime ici sous la forme $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$. Or nous avons prescrit pour ce problème deux conditions pour la vitesse, l'annulation de la vitesse à la paroi (adhérence) et la valeur de cette vitesse à l'infini, cf. (8.2.1). Cela révèle **une faiblesse majeure** du modèle du fluide parfait, donc des équations d'Euler. Nous encadrons ce constat, vu son importance.

Le modèle de fluide parfait ne peut satisfaire pour le champ de vitesse, ni deux conditions aux limites simultanées, ni une condition d'adhérence ou de non-glissement.

La réduction des équations de Navier-Stokes aux équations d'Euler par le modèle du fluide parfait souffre donc des deux défauts suivants :

- ✓ sur **un plan physique**, l'adhérence ne peut pas être assurée par le fluide parfait qui est un « fluide non visqueux » ;
- ✓ sur **un plan mathématique**, la perte du terme de frottement visqueux et celui de la diffusion de chaleur par conduction transforment les équations de Navier-Stokes, qui sont des équations du **second ordre** en espace, en équations du **premier ordre** : une seule condition aux limites (plus une condition initiale si le problème est instationnaire) est alors requise.

La condition thermique (8.2.1) ne peut pas être satisfaite non plus puisque le fluide parfait est un « fluide non conducteur ».

Il faut noter qu'il n'y a aucun paradoxe dans ce constat. En effet, lorsque le nombre de Reynolds augmente, les **équations** de Navier-Stokes tendent de mieux en mieux vers les équations d'Euler puisque le frottement visqueux devient de plus en plus petit devant l'inertie de l'écoulement. Mais les **conditions aux limites** restent quant à elles inchangées.

Par conséquent, puisque les expériences montrent que le fluide réel **adhère** à la surface d'un objet, ou qu'il ne glisse pas au contact d'un autre fluide, le terme de **frottement visqueux** de la loi de la dynamique doit forcément **rester important dans une région donnée**, proche de cette surface. Comme schématisé sur la figure 8.3 ci-dessous, l'expérience montre alors que cette région est d'autant plus mince que le nombre de Reynolds est grand. La région entourant l'objet, où se concentrent les effets visqueux et où le modèle de fluide parfait n'est plus applicable, est appelée **la couche limite**.

La couche limite : définition -

En mécanique des fluides, on appelle couche limite une région de l'écoulement en dehors de laquelle le fluide se comporte comme un fluide parfait.

Dans le cas d'un écoulement autour d'un obstacle solide par exemple, la présence d'une couche limite est nécessaire pour que l'écoulement au contact de la surface de l'objet vérifie la condition d'adhérence ainsi que la condition limite thermique en vigueur.

Comme schématisé sur la figure 8.3, cette région se propage par convection vers l'aval où elle forme un **sillage visqueux**. Quelqu'important que puisse être le nombre de Reynolds, il existe donc toujours une couche limite autour d'un objet dans un écoulement. Nous consacrerons le **chapitre 15** à la modélisation de ce phénomène.

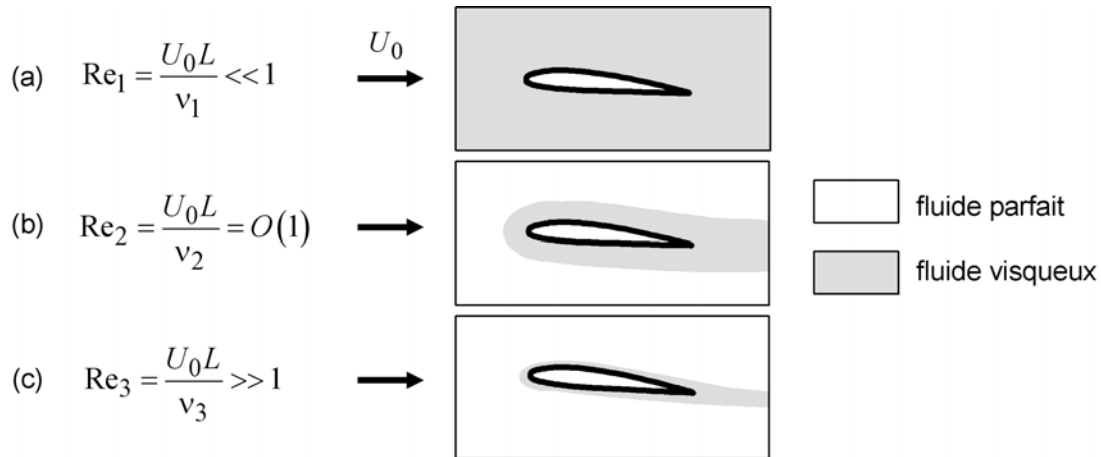


Figure 8.3 - Écoulements de fluide parfait et écoulement de fluide visqueux autour d'un objet pour différents nombres de Reynolds (on fait varier ici ce paramètre en changeant la viscosité du fluide).

8.6 Écoulements de fluide non pesant

La troisième approximation listée dans le tableau 8.2 est celle des écoulements sans force extérieure. On considère ici le cas de la gravité. Nous avons vu que l'importance de la gravité s'évalue à travers le **nombre de Froude** $Fr = U_0 / \sqrt{gL}$, comme défini en (8.2.11). Ce paramètre sans dimension apparaît dans l'équation de la dynamique du système adimensionnel (8.2.6). Comme nous l'avons précisé, il compare l'énergie cinétique $\rho_0 U_0^2$ à l'énergie potentielle de gravitation. On pourra donc négliger la pesanteur dans un écoulement dans la mesure où :

$$(8.6.1) \quad \boxed{Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gL}} \gg 1}$$

On parlera alors d'écoulement de **fluide non-pesant**. Le fluide en écoulement sera qualifié de **pesant** dans le cas contraire. La condition ci-dessus est vérifiée si l'écoulement est suffisamment rapide et/ou si son échelle de longueur caractéristique est suffisamment petite. Voici deux exemples d'écoulements non-pesants de natures différentes, correspondant tous deux à un nombre de Froude $Fr \approx 10$:

✓ l'écoulement d'air autour d'un avion, pour lequel, si on se limite à des ordres de grandeur, $L \sim 10m$ et $U_0 \sim 100m.s^{-1}$;

✓ le mouvement d'une balle de jeu telle que $L \sim 10^{-1}m$ lancée avec une vitesse $U_0 \sim 10m.s^{-1}$.

Un problème typique d'écoulement pesant, donc dominé par la gravité, est celui d'une conduite d'eau inclinée dans laquelle l'écoulement est seulement dû à la gravité. Dans ce cas $U_0 \sim \sqrt{gL}$, où L désigne la hauteur du dénivelé de la conduite. Soit $Fr \sim 1$.

8.7 Les écoulements sans inertie

On considère ici la quatrième et dernière approximation répertoriée dans le tableau 8.2, celle des écoulements sans inertie. Ces écoulements, appelés aussi **écoulements rampants** ou **écoulements de Stokes**. On peut distinguer deux classes d'écoulements sans inertie : les **écoulements à très petits nombres de Reynolds** et les **écoulements unidirectionnels incompressibles**.

➤ Le cas des écoulements à très petit nombre de Reynolds

Ces écoulements vérifient la condition :

$$(8.7.1) \quad \boxed{Re \ll 1}$$

Puisque le nombre de Reynolds compare les termes d'inertie aux termes visqueux, les écoulements à petits nombres de Reynolds perdent leur inertie. Notamment, dans ces écoulements, le terme d'accélération convective de l'équation de la quantité de mouvement peut être négligé :

(8.7.2)

$$\nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = 0$$

Remarque -

Le terme instationnaire $\partial \underline{u} / \partial t$ de l'accélération particulière $d \underline{u} / dt = \partial \underline{u} / \partial t + \nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$ peut quant à lui subsister dans le cas d'un mouvement instationnaire forcé comme nous le verrons plus bas.

La condition (8.7.2) implique que ces écoulements **perdent leur caractère non linéaire**. Le problème linéaire ainsi obtenu devient alors éligible à une résolution analytique.

Pour fixer quelques ordres de grandeur, considérons le cas « intermédiaire » où $Re = 1$. Cela correspond à un produit vitesse-longueur $U_0 L$ égal à la viscosité cinématique ν , soit $10^{-6} - 10^{-5} m^2.s^{-1}$ pour un fluide classique tel que l'air ou l'eau dans les conditions standard. Dans le cadre de notre « problème guide » cela correspond donc à de très petits objets se déplaçant à de très petites vitesses, comme par exemple une sphère de 1 millimètre qui se déplace dans de l'eau ($\nu \approx 10^{-6} m^2.s^{-1}$) avec une vitesse valant $U_0 = 1 mm.s^{-1}$. L'objet peut être plus gros si le fluide est plus visqueux, comme dans le cas d'une bille de plomb qui chute dans du miel.

➤ **Le cas des écoulements unidirectionnels de fluide incompressible**

Certains écoulements peuvent vérifier la condition (8.7.2) sans pour autant que leur nombre de Reynolds soit très petit. Il s'agit des écoulements **unidirectionnels de fluide incompressible**.

Un écoulement peut en effet perdre son terme d'inertie $\nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$, non pas parce que son nombre de Reynolds est petit, mais parce que son champ de vitesse devient **invariant dans la direction de l'écoulement**. Trois écoulements classiques de ce type sont répertoriés sur la figure 8.4 ci-dessous. Dans ces trois écoulements, la présence de parois tend à maintenir **les gradients de la vitesse perpendiculaires à la direction de l'écoulement** de sorte que (8.7.2) est vérifié.

Le cas de la figure 8.4 (a), est celui l'écoulement stationnaire qui s'établit dans une longue conduite étroite sous l'effet d'un différentiel de pression amont-aval. Cet écoulement est connu sous le nom d'**écoulement de Poiseuille**. Le cas de la figure 8.4 (b) correspond à l'écoulement entraîné par le déplacement d'une plaque plane. Il s'agit d'un écoulement instationnaire. Ce problème est connu sous le nom de **premier problème de Stokes**. Enfin,

le cas de la figure 8.4 (c) est obtenu quand on rajoute dans l'écoulement précédent une seconde plaque plane au-dessus de la plaque en mouvement. Comme schématisé sur la figure 8.4 (c), sur les temps longs l'écoulement prend alors la forme d'un cisaillement uniforme et stationnaire entre les deux plaques. Cet écoulement est connu sous le nom d'**écoulement de Couette**.

Remarque -

Nous avons déjà évoqué l'écoulement de Poiseuille et l'écoulement de Couette (ainsi que leur version instationnaire) au **chapitre 2** lorsque nous avons illustré l'accélération particulière (voir approfondissement du paragraphe 2.13, figure 2.44).

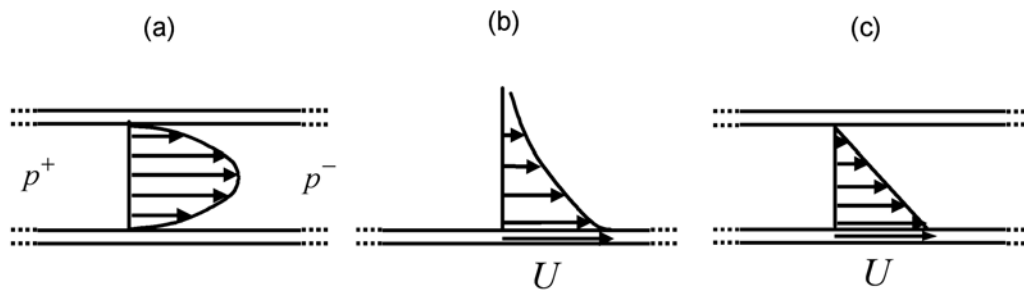


Figure 8.4 - Exemples d'écoulements unidirectionnels de fluide incompressible : (a) écoulement engendré par un gradient de pression dans un canal de section constante (écoulement de Poiseuille stationnaire), (b) écoulement engendré par une translation de vitesse constante d'une plaque plane (premier problème de Stokes), (c) écoulement engendré par une translation de vitesse constante d'une plaque parallèlement à une seconde plaque fixe (écoulement de Couette stationnaire).

Les équations du mouvement des écoulements unidirectionnels perdent leur caractère non linéaire et, comme pour les écoulements à très petits nombres de Reynolds (écoulements rampants), le problème devient abordable sur le plan analytique. Nous discutons la solution des trois problèmes de la figure 8.4 plus loin, dans le prochain chapitre et dans le dernier chapitre.

➤ **Les équations des écoulements sans inertie : cas des écoulements de fluide incompressible homogène avec force extérieure dérivant d'un potentiel**

Dans le cas où l'écoulement sans inertie est celui d'un fluide incompressible homogène, donc tel que $\rho = \text{const.}$, et si de plus la force extérieure dérive d'un potentiel, $\underline{f} = -\underline{\text{grad}} \phi$, en éliminant le terme d'inertie $\nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$ dans la loi de la dynamique du fluide incompressible homogène (8.3.19), on obtient :

$$(8.7.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \underline{u} = 0 \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\underline{\text{grad}} \frac{p^*}{\rho} + \nu \Delta \underline{u} \\ p^* = p + \rho \phi \end{array} \right.$$

Si, de plus, l'écoulement est **stationnaire**, on a :

$$(8.7.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \underline{u} = 0 \\ \underline{\text{grad}} p^* = \eta \Delta \underline{u} \end{array} \right.$$

Dans cette situation, le terme de pression équilibre le terme visqueux et l'on note que la masse volumique disparaît de l'équation du mouvement.

➤ Les écoulements sans inertie : applications

Le cas des écoulements stationnaires sans inertie concerne une vaste gamme d'applications.

✓ Le cas des écoulements à très petit nombre de Reynolds (écoulements rampants) s'applique à la sédimentation de petites particules telles que les aérosols solides (fumées, particules aériennes...) ou liquides (nuage, brouillard, brume...). Il s'applique aussi à la locomotion des petits organismes ainsi qu'à l'analyse des écoulements de liquide dans les dispositifs microfluidiques.

✓ Le cas des écoulements unidirectionnels constitue quant à lui la base de l'analyse des problèmes de lubrification. On peut par exemple voir le problème de l'écoulement de Couette schématisé sur la figure 8.4 (c) comme une idéalisation de l'écoulement assurant la lubrification entre une pièce mobile et une pièce fixe. Enfin, l'écoulement de Poiseuille illustré sur la figure 8.4 (a) concerne au premier chef toutes les applications de type hydraulique qui mettent en jeu des conduites.

8.8 Les écoulements stationnaires

Nous terminons ce chapitre par l'examen des conditions qui fixent le caractère stationnaire ou instationnaire d'un écoulement. Si l'écoulement est stationnaire on peut éliminer les termes instationnaires des équations (les dérivées partielles par rapport au temps, cf. tableau 8.1). Mais cela ne constitue pas une approximation (un modèle) à proprement parler. En effet, contrairement aux écoulements de fluide incompressible, de fluide parfait, de fluide non-pesant, ou encore contrairement aux écoulements sans inertie, la classe des écoulements stationnaires ne résulte pas d'une approximation des équations. En effet, dans la mesure où le caractère stationnaire d'un écoulement est avéré par l'expérience, les équations de Navier-Stokes stationnaires sont des équations « exactes ».

Comme nous venons de le souligner, la confrontation aux expériences est requise pour juger du caractère stationnaire ou non des écoulements. En effet, comme nous allons l'illustrer maintenant, les écoulements de fluide peuvent développer de manière spontanée des comportements instationnaires. Il s'avère alors que l'analyse comparative des ordres de grandeur des différents termes des équations que nous avons pratiquée jusqu'ici ne permet pas de classer facilement l'occurrence de ces instationnarités naturelles dans les écoulements de fluide.

➤ Le nombre de Strouhal

Dans notre « problème guide » de la figure 8.1, nous n'avions introduit aucune donnée explicite concernant le temps. Nous avons alors choisi de le normaliser par le temps d'advection $\tau_0 = L/U_0$, cf. (8.2.2). Par contre, si comme schématisé sur la figure 8.5, l'objet est soumis à une vibration imposée extérieurement et caractérisée par une période que l'on note τ , la liste des paramètres contient alors ce temps qui peut être choisi pour unité fondamentale de temps en lieu et place du temps $\tau_0 = L/U_0$.

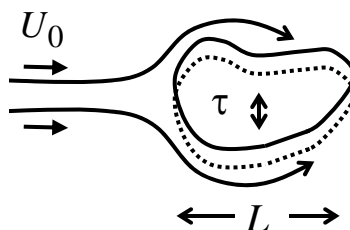


Figure 8.5 - Écoulement en interaction avec un objet vibrant avec un temps caractéristique τ .

Si l'écoulement est instationnaire, le terme d'accélération de la loi de la dynamique (8.2.4) conserve sa dérivée partielle par rapport au temps :

$$(8.8.1) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

En posant :

$$(8.8.2) \quad t = \tau \bar{t},$$

on obtient en fonction des variables sans dimension :

$$(8.8.3) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left(\frac{U_0}{\tau} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{t}} + \left(\frac{U_0^2}{L} \right) \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \left(\frac{U_0^2}{L} \right) \left[\text{St} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{t}} + \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \right]$$

L'importance de la dérivée temporelle par rapport à l'accélération convective s'évalue ainsi à travers le paramètre sans dimension :

$$(8.8.4) \quad \boxed{\text{St} = \frac{\tau_0}{\tau} = \frac{L}{U_0 \tau}}$$

appelé **nombre de Strouhal**.

Si $\text{St} \ll 1$, les variations forcées de l'écoulement ne sont pas ressenties par les particules de fluide durant leur advection et l'écoulement peut donc être stationnaire **dans la mesure où il s'avère stable**, c'est-à-dire **exempt d'instationnarités naturelles** du type de celles que nous décrivons ci-dessous. L'écoulement est inconditionnellement instationnaire dans le cas contraire.

➤ **Instationnarités forcées - Instationnarités naturelles**

Nous avons considéré ci-dessus le cas où l'**instationnarité** est forcée, cas pour lequel le temps caractéristique τ est une donnée du problème. Mais dans de nombreuses situations, l'expérience montre que les écoulements peuvent être **naturellement instationnaires, même quand leurs conditions aux limites sont, elles, parfaitement stationnaires.**

Un exemple édifiant, montré sur la figure 8.6 ci-dessous, est celui d'un cylindre fixe dans un écoulement. Pour un nombre de Reynolds suffisant, voir figure 8.6 (a), on observe dans le sillage visqueux du cylindre un phénomène de lâcher de tourbillons de signes alternés. Le sillage visqueux forme alors une allée tourbillonnaire appelée **allée de Von-Karman**.

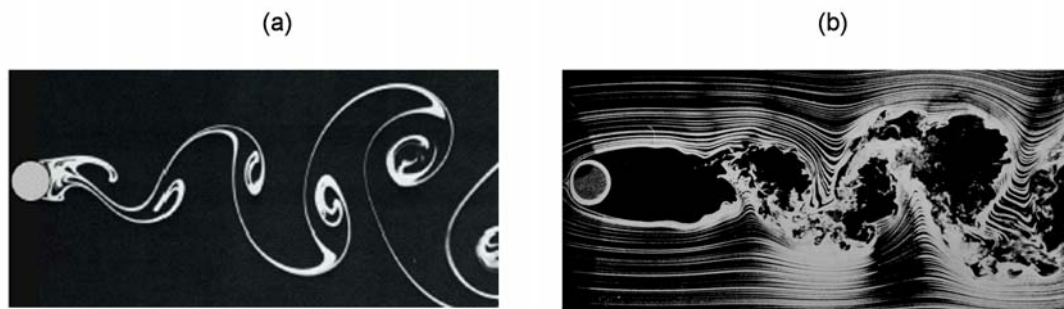


Figure 8.6 - Écoulement en interaction avec un cylindre fixe : (a) instationnarité naturelle visualisée à l'aide de lignes d'émission colorées émises à partir du cylindre ; (b) instationnarité naturelle visualisée à partir de lignes d'émission colorées émises dans l'écoulement amont. Le nombre de Reynolds $Re = U_0 D / \nu$, où D désigne le diamètre du cylindre, vaut respectivement $Re=140$ dans le cas de la figure (a), et $Re=10\,000$ dans le cas de la figure (b) . D'après Van Dyke (1982).

Ce phénomène se développe ici dans un écoulement initialement stationnaire où toutes les conditions aux limites sont fixées et sont stationnaires. Il introduit alors un temps caractéristique qui est la période du lâcher des tourbillons. On notera le temps de ces instationnarités naturelles τ_{fluide} :

$$(8.8.5) \quad \tau_{\text{fluide}} = \text{temps caractéristique des instationnarités naturelles}$$

Ce comportement instationnaire du fluide est une manifestation du caractère **instable** de l'écoulement. Les expériences montrent qu'il n'apparaît que lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand. Ces expériences prouvent aussi que le phénomène se déclenche de

manière brutale lorsque le nombre de Reynolds atteint et dépasse une valeur particulière, appelée nombre de Reynolds critique, que l'on note Re_c .

Ainsi, dans notre problème guide, l'écoulement pourra être considéré comme **stationnaire** si le nombre de Reynolds reste modéré, tel que :

$$(8.8.6) \quad Re = \frac{U_0 L}{\nu} \leq Re_c$$

La valeur « critique » Re_c est a priori inconnue pour un objet de forme quelconque. Pour un cylindre, l'expérience montre que cette valeur est $Re_c \approx 40$, valeur qui est effectivement dépassée sur la figure **8.6 (a)** où l'écoulement est manifestement devenu instationnaire. Pour $Re < 40$ l'écoulement est stationnaire. Comme montrée sur la figure **8.6 (b)**, lorsque $Re \gg Re_c$, des tourbillons secondaires se forment et l'allée de Von-Karman se complexifie.

On notera bien qu'aucune instationnarité n'est introduite de manière extérieure dans les écoulements de la figure **8.6**. Le temps caractéristique τ_{fluide} des instationnarités naturelles n'est donc pas une **donnée** du problème, mais une **propriété** de l'écoulement. Il en va de même du nombre de Strouhal bâti sur la période τ_{fluide} :

$$(8.8.7) \quad St = \frac{\tau_0}{\tau_{fluide}} = \frac{L}{U_0 \tau_{fluide}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{nombre de Strouhal} \\ \text{naturel de l'écoulement} \end{array} \right.$$

➤ Le besoin d'un nouveau modèle : la turbulence

Partant de la situation de la figure **8.6 (a)**, lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds au-delà de sa valeur critique (en augmentant la vitesse de l'écoulement par exemple), la figure **8.6 (b)** montre que le phénomène se « bruite » : l'écoulement devient turbulent. Nous précisons cette notion dans le dernier chapitre. La complexité de l'écoulement instationnaire ainsi obtenu devient alors telle que la résolution numérique des équations de Navier-Stokes s'avère impraticable sans introduire de nouvelles modélisations. Notamment, d'un point de vue pratique, on fait souvent appel à un **filtrage statistique** (une moyenne) des équations de Navier-Stokes pour aboutir à un nouveau modèle constitué par les **équations de Navier-Stokes moyennées**. Nous n'avons pas inclus ce type de modèle dans

le tableau 8.2, car leur formulation ne fait pas encore l'objet d'un consensus au sein de la communauté scientifique. Nous expliquerons tout cela dans le dernier chapitre.

➤ **Conclusion sur le caractère stationnaire ou instationnaire des écoulements**

On ne peut donc pas statuer **a priori** sur le caractère stationnaire ou instationnaire d'un écoulement de fluide. Il faut traiter la chose au cas par cas :

✓ si toutes les conditions aux limites de l'écoulement sont stationnaires, ce dernier peut être stationnaire, ou bien instationnaire suite au développement d'instationnarités naturelles ;

✓ si l'écoulement est soumis à des conditions aux limites instationnaires, il sera inconditionnellement instationnaire si son nombre de Strouhal (8.8.4), est d'ordre 1 ou plus, soit si :

$$(8.8.8) \quad St \not\ll 1$$

Il est donc indispensable de s'appuyer sur les expériences pour appliquer l'hypothèse des écoulements stationnaires.

Enfin, rappelons-le, contrairement aux écoulements différentes catégories de modèles présentés dans ce chapitre (fluide incompressible, fluide parfait, fluide non pesant, écoulement sans inertie), la classe des écoulements stationnaires ne résulte pas d'une approximation des équations : dans la mesure où le caractère stationnaire d'un écoulement est avéré par l'expérience, les équations de Navier-Stokes stationnaires sont « exactes ».

8.9 Résumé des formules essentielles

- **Les principaux paramètres sans dimension**, cf. (8.2.16), (8.2.14), (8.2.11), (8.2.20), (8.4.8), (8.8.4)

$$(8.9.1) \quad \text{Re} = \frac{U_0 L}{\nu} \quad \text{- nombre de Reynolds}$$

$$(8.9.2) \quad M_0 = \frac{U_0}{c_0} \quad \text{- nombre de Mach}$$

$$(8.9.3) \quad \text{Fr} = \frac{U_0}{\sqrt{gL}} \quad \text{- nombre de Froude}$$

$$(8.9.4) \quad \text{Pe} = \frac{U_0 L}{\chi} \quad \text{- nombre de Péclet ,}$$

$$(8.9.5) \quad \text{Pr} = \frac{\text{Pe}}{\text{Re}} = \frac{\nu}{\chi} \quad \text{- nombre de Prandtl}$$

$$(8.9.6) \quad \text{St} = \frac{L}{U_0 \tau} \quad \text{- nombre de Strouhal}$$

- **Le modèle des écoulements de fluide incompressible**

✓ **définition**, cf. (8.3.1)

$$(8.9.7) \quad \text{div} \underline{u} = 0$$

✓ **Critères de validité**, cf. (8.3.5), (8.3.7)

$$(8.9.8) \quad \begin{cases} M_0^2 \ll 1 \\ \alpha |\delta T| \ll 1 \end{cases}$$

✓ **Thermodynamique**, cf. (8.3.8), (8.3.9)

(8.9.9) $\left\{ \begin{array}{l} \text{- pression thermodynamique indéfinie, cf. (8.3.8)} \\ \text{- loi d'état calorifique : } e = e(\rho, T) = e(T) \\ \text{- une seule chaleur spécifique : } c = c_p = c_V = \frac{de}{dT} \end{array} \right.$

✓ **Equations**

- **Cas η et K constants, écoulement pesant sans source volumique de chaleur**, cf. (8.3.15), (8.3.16), (8.3.17)

(8.9.10) $\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \underline{u} = 0 \\ \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p + \nu \Delta \underline{u} \\ \frac{dT}{dt} = \frac{2\nu}{c} \underline{d} : \underline{d} + \chi \Delta T \end{array} \right.$

(8.9.11) $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ - viscosité cinématique

(8.9.12) $\chi = \frac{K}{\rho c}$ - diffusivité thermique

- **Conditions aux limites** : identiques à celles des équations générales de Navier - Stokes

➤ **Le modèle des écoulements de fluide parfait**

✓ **Définition**, cf. (8.4.3)

(8.9.13) $r = 0, \underline{q} = 0, \underline{\tau} = 0$

✓ **Critères de validité**, cf. (8.4.6), (8.4.9)

(8.9.14) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \gg 1 \\ \text{Pe} = \text{Pr} \times \text{Re} \gg 1 \end{array} \right.$

✓ **Equations d'Euler**, cf. (8.4.10)

$$(8.9.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \rho \underline{f} - \underline{\operatorname{grad}} p \\ \rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{u} \\ p = p(\rho, T) \\ e = e(\rho, T) \end{array} \right.$$

✓ **Les conditions aux limites : cas d'une interface fluide-solide**

- **Imperméabilité (glissement)**, cf. (8.4.13)

$$(8.9.16) \quad \underline{u} \cdot \underline{n} = \underline{U} \cdot \underline{n}$$

- **Condition dynamique** : aucune

- **Condition thermique** : aucune

✓ **Les conditions aux limites : cas d'une interface entre deux fluides non-miscibles**

- **Condition cinématique (condition de surface matérielle)**, cf. (8.4.15)

$$(8.9.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\underline{x}, t) = 0 \quad \text{- équation de l'interface} \\ \left(\frac{dF}{dt} \right)_1 = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{u}_1 \cdot \underline{\operatorname{grad}} F = \left(\frac{dF}{dt} \right)_2 = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{u}_2 \cdot \underline{\operatorname{grad}} F = 0 \end{array} \right.$$

- **Condition dynamique** (sans phénomène de tension superficielle), cf. (8.4.16)

$$(8.9.18) \quad p = \text{const.}$$

- **Condition thermique** : aucune

✓ **Propriétés**, cf. (8.4.4), (8.4.5)

$$(8.9.19) \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{- isentropique}$$

$$(8.9.20) \quad \frac{dH}{dt} = \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} H = 0 \quad \text{- isoénergétique (écoulements permanents)}$$

➤ **Ecoulements non pesants**✓ **Critère de validité**, cf. (8.6.1)

$$(8.9.26) \quad Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gL}} \gg 1 \quad - \text{nombre de Froude}$$

➤ **Ecoulements sans inertie**✓ **Définition**, cf. (8.7.2)

$$(8.9.27) \quad \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = 0$$

✓ **Critère de validité : cas des écoulements rampants**, cf. (8.7.1)

$$(8.9.28) \quad Re \ll 1$$

✓ **Equations**- **Cas des écoulements incompressibles homogènes avec force de volume dérivant d'un potentiel**, cf. (8.7.3)

$$(8.9.29) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\underline{\operatorname{grad}} \frac{p^*}{\rho} + \nu \Delta \underline{u} \\ p^* = p + \rho \phi \end{cases}$$

- **idem + écoulement permanent**, cf. (8.7.4)

$$(8.9.30) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \underline{\operatorname{grad}} p^* = \eta \Delta \underline{u} \end{cases}$$

➤ **Ecoulements stationnaires**✓ **définition**

$$(8.9.21) \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

✓ **Critères de validité**- **Cas avec conditions aux limites instationnaires**, cf. (8.8.8)

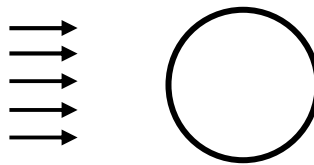
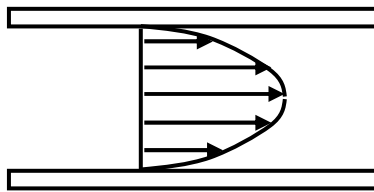
$$(8.9.22) \quad St = \frac{L}{U_0 \tau} \ll 1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{nombre de Strouhal} \\ \tau = \text{temps caractéristique des instationnarités imposées} \end{array} \right.$$

- Cas sans conditions aux limites instationnaire, cf. (8.8.6)

$$(8.9.26) \quad Re \leq Re_c \quad \left| \begin{array}{l} \text{nombre de Reynolds critique} \\ \text{apparition d'instationnarités naturelles} \end{array} \right.$$

Chapitre 9

Deux exemples de solutions analytiques



Chapitre 9. Solutions analytiques : deux exemples	343
9.1 Avant-propos	343
9.2 L'écoulement de Poiseuille cylindrique	344
Énoncé	344
Équations	345
Équations : forme développée	347
La contrainte visqueuse et la loi de vitesse	347
La vitesse de débit	349
Le coefficient de frottement	350
Confrontation aux expériences	351
Un point d'histoire	353
Conclusion	353
9.3 L'écoulement autour d'une sphère à petit nombre de Reynolds (second problème de Stokes)	354
Avant-propos	354
Énoncé	355
Équations	356
Solution	356
Confrontation aux expériences	357
Application : les gouttes de pluie	358
9.4 Approfondissement ** - Le second problème de Stokes : résolution détaillée	359
Formulation en vorticité	359
La fonction de courant	361
Le champ de vitesse	363
Le champ de pression	363
La force résultante	364
Limite de validité	365

Chapitre 9. Solutions analytiques : deux exemples

9.1 Avant-propos

Il existe quelques **solutions analytiques** des équations de Navier-Stokes mais le catalogue de ces solutions est peu étoffé. Cela tient au fait que les équations de Navier-Stokes sont non-linéaires. La majorité des solutions connues concernent des situations où les équations sont **linéaires**. Elles appartiennent donc à la classe des **écoulements sans inertie** définie dans le chapitre précédent, cf. paragraphe 8.7.

Nous allons considérer deux solutions de ce type dont l'intérêt pédagogique et l'intérêt applicatif sont de tout premier plan. Ces deux écoulements sont :

- ✓ l'écoulement de Poiseuille cylindrique ;
- ✓ l'écoulement autour d'une sphère à petit nombre de Reynolds (second problème de Stokes).

L'écoulement de Poiseuille a été évoqué dans le chapitre précédent, cf. figure 8.4 (a). Sa solution est supposée connue de toute personne ayant reçu une formation élémentaire en mécanique des fluides et nous allons la détailler ici dans le cas d'une géométrie cylindrique. La résolution analytique de l'écoulement autour d'une sphère à petit nombre de Reynolds est, quant à elle, plus complexe à établir. Nous cantonnerons alors les détails de cette résolution dans un approfondissement en ne retenant dans le corps du texte que les résultats essentiels.

Les objectifs de ce chapitre sont, d'une part, d'illustrer l'existence de solutions analytiques en mécanique des fluides et, d'autre part, de discuter de leur limite de validité. Cela constituera une bonne introduction au chapitre suivant où nous montrerons comment l'on peut déduire de raisonnements purement dimensionnels, et sans aucun effort analytique, les principaux résultats obtenus dans ce chapitre.

9.2 L'écoulement de Poiseuille cylindrique

➤ Énoncé

Conformément à la figure 9.1 ci-dessous, on considère une conduite horizontale de section circulaire de diamètre $\phi = 2R$ constant, de longueur $L \gg \phi$, dans laquelle on a établi un **écoulement de fluide newtonien pesant** au moyen d'un différentiel de pression amont-aval $\Delta p = p^+ - p^-$.

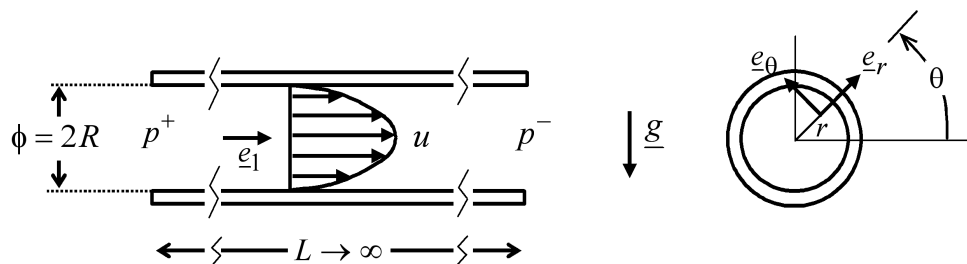


Figure 9.1 - Écoulement de Poiseuille cylindrique : définitions.

On raisonne dans un repère de coordonnées cylindriques (x, r, θ) dans lequel la vitesse s'exprime sous la forme :

$$(9.2.1) \quad \underline{u} = u(x, r, \theta, t) \underline{e}_1 + u_r(x, r, \theta, t) \underline{e}_r + u_\theta(x, r, \theta, t) \underline{e}_\theta$$

On fait les hypothèses suivantes :

- H1** - le fluide est newtonien, incompressible et homogène, de masse volumique ρ ;
- H2** - la viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ est constante ;
- H3** - l'écoulement est permanent ;
- H4** - on néglige les forces extérieures (notamment : le fluide est considéré comme non-pesant) ;
- H5** - l'écoulement est unidirectionnel et invariant le long de la conduite, son champ de vitesse étant de la forme :

$$(9.2.2) \quad \underline{u} = u(r) \underline{e}_1$$

On veut déterminer :

- ✓ la distribution de la vitesse $u(r)$ dans la conduite ;
- ✓ la vitesse de débit U_d , cf. (A2.2.11) :

$$(9.2.3) \quad U_d = \frac{Q}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \times 2\pi \int_0^R u(r) r dr ;$$

- ✓ le **coefficient de frottement** λ , que l'on définit par la formule :

$$(9.2.4) \quad \lambda \equiv \frac{\Delta p / (L/\phi)}{\frac{1}{2} \rho U_d^2},$$

où $\Delta p = p^+ - p^-$ est le différentiel de pression entre l'amont et l'aval de la portion de conduite de longueur L considérée. Le coefficient λ est sans dimension. On cherchera à exprimer ce coefficient en fonction du nombre de Reynolds construit ici avec la vitesse de débit U_d et avec le diamètre de la conduite $\phi = 2R$, soit, cf. (8.2.16) :

$$(9.2.5) \quad \text{Re} = \frac{U_d \phi}{\nu}$$

➤ Équations

Compte tenu des hypothèses **H1** et **H2**, le système d'équations relevant de ce problème est le système (8.3.19) relatif aux écoulements de fluide incompressible homogène de viscosité constante. Si l'on néglige le terme instationnaire dans la dérivée particulaire, conformément à l'hypothèse **H3**, ainsi que la force extérieure, selon l'hypothèse **H4**, on obtient les équations du mouvement suivantes :

$$(9.2.6) \quad \begin{cases} \text{div } \underline{u} = 0 \\ \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = -\underline{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \underline{u} \end{cases}$$

La masse volumique et la viscosité étant constantes, ces équations sont indépendantes du bilan de température (c'est le découplage dynamique / thermique comme vu au paragraphe 8.3).

La dernière hypothèse **H5** impose alors une forte contrainte sur le problème : la vitesse et son gradient sont perpendiculaires, de sorte que la loi de la dynamique (9.2.6) perd son terme d'inertie $\nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$.

Démonstration -

Compte tenu de (9.2.2), le gradient de vitesse vaut :

$$(9.2.7) \quad \nabla \underline{u} = \frac{du}{dr} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_r$$

D'où :

$$(9.2.8) \quad \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = u \frac{du}{dr} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_r) \cdot \underline{e}_1 = 0$$

Notons que cette hypothèse est compatible avec l'hypothèse d'incompressibilité **H1**. En effet, dans un système de coordonnées cylindriques l'équation de continuité s'écrit, cf. (A2.1.21) :

$$(9.2.9) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Cette équation est bien vérifiée par (9.2.2), chacun des trois termes ci-dessus étant identiquement nul.

Le bilan (9.2.6) se réduit donc à :

$$(9.2.10) \quad \begin{cases} \text{div } \underline{u} = 0 \\ \underline{\text{grad}} p = \eta \Delta \underline{u} \end{cases}$$

La loi de la dynamique ci-dessus traduit l'équilibre entre les forces de pression qui poussent le fluide et les forces de frottement qui s'opposent à ce mouvement. On retrouve donc ici les équations (8.7.4) relatives aux **écoulements stationnaires sans inertie**. De plus ici l'écoulement est non pesant.

➤ **Équations : forme développée**

Le terme visqueux dans (9.2.10) fait appel au laplacien de la vitesse en coordonnées cylindriques dont l'expression générale est donnée dans l'annexe A2.1 du chapitre 2, cf. (A2.1.17). Pour le champ unidirectionnel (9.2.2) il reste :

$$(9.2.11) \quad \Delta \underline{u} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) \underline{e}_1$$

L'équation du mouvement (9.2.10) donne donc :

$$(9.2.12) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

La première condition aux limites qu'il convient d'appliquer à ce système d'équations de deuxième ordre est l'adhérence :

$$(9.2.13) \quad u(R) = 0$$

La seconde condition aux limites concerne l'axe de l'écoulement. On la considère sous la forme :

$$(9.2.14) \quad \frac{du}{dr}(0) = 0$$

Cette relation traduit le caractère axisymétrique de l'écoulement qui résulte de l'hypothèse unidirectionnelle H5.

➤ **La contrainte visqueuse et la loi de vitesse**

Compte tenu des deux dernières équations (9.2.12), la pression vérifie :

$$(9.2.15) \quad p = p(x)$$

En dérivant alors la première équation (9.2.12) par rapport à x , puisque u ne dépend que de r , on en conclut alors que $\partial^2 p / \partial x^2 = 0$, donc le gradient de pression $\partial p / \partial x$ est constant. Ce gradient doit être négatif de manière à contrer la force de frottement visqueuse qui résiste à l'avancement du fluide. On posera donc :

$$(9.2.16) \quad G = -\frac{dp}{dx} = \text{const} (> 0)$$

La loi de la dynamique se ramène ainsi à l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$(9.2.17) \quad G + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0$$

L'équation (9.2.17) s'intègre alors sans difficulté. Une première intégration donne :

$$(9.2.18) \quad \eta \frac{du}{dr} = -G \frac{r}{2} + \frac{\text{const}}{r}$$

La condition sur l'axe (9.2.14) impose l'annulation de la constante, soit pour le frottement dans le fluide, que l'on note $\tau(r)$:

$$(9.2.19) \quad \tau(r) = \eta \frac{du}{dr}(r) = -\frac{G}{2} r$$

Conformément à cette relation, le frottement est distribué de manière linéaire à travers la conduite. Cela est schématisé sur la figure 9.2 ci-dessous.

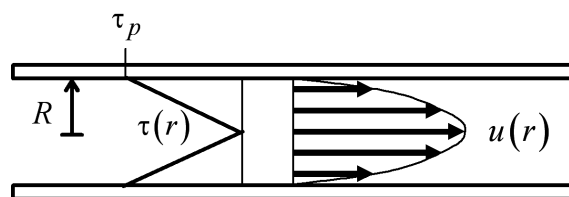


Figure 9.2 - Écoulement de Poiseuille cylindrique permanent : profils du frottement et de la vitesse.

La valeur du frottement à la paroi définit le **frottement pariétal**, que l'on note τ_p . Il vaut :

$$(9.2.20) \quad \tau_p = \tau(R) = -\frac{G}{2}R$$

En intégrant (9.2.18) et en utilisant la condition d'adhérence (9.2.13) on obtient une **distribution de vitesse parabolique**, d'équation :

$$(9.2.21) \quad \boxed{u(r) = \frac{G}{4\eta} (R^2 - r^2)}$$

C'est le profil parabolique de l'écoulement de Poiseuille cylindrique. Il est également représenté sur la figure 9.2.

➤ La vitesse de débit

Pour le débit volumique \mathcal{Q} qui intervient dans la vitesse de débit demandée en (9.2.3), il vient :

$$(9.2.22) \quad \mathcal{Q} (m^3 \cdot s^{-1}) = \iint_S \underline{u} \cdot \underline{n} dS = -\frac{G}{4\eta} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 - R^2) r dr = \frac{\pi R^4 G}{8\eta}$$

Cette relation porte de nom de **formule de Poiseuille**. Conformément à cette formule, le débit est proportionnel au gradient de pression G qui pousse le fluide et il est inversement proportionnel à la viscosité η qui s'oppose à l'avancement du fluide. Pour la vitesse de débit demandée, on obtient donc :

$$(9.2.23) \quad \boxed{U_d = \frac{\dot{m}}{\rho S} = \frac{1}{\rho \pi R^2} \frac{\rho \pi R^4 G}{8\eta} = \frac{R^2 G}{8\eta} = \frac{\phi^2 G}{32\eta}}$$

Soit pour la loi de vitesse (9.2.21) :

$$(9.2.24) \quad u(r) = 2U_d \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

On note que la vitesse au centre de la conduite est égale au double de la vitesse de débit.

➤ Le coefficient de frottement

Il s'agit de déterminer maintenant l'expression du coefficient de frottement défini en (9.2.4). On demande de l'exprimer en fonction du nombre de Reynolds $Re = U_d \phi / \nu$, cf. (9.2.5). Puisque le gradient de pression G est constant, cf. (9.2.16), et puisque la pression est uniforme dans chaque section, cf. (9.2.15), en considérant une portion de conduite de longueur L , on peut écrire :

$$(9.2.25) \quad G = \frac{p(x) - p(x+L)}{L} = \frac{\Delta p}{L}$$

En posant $\Delta p = G L$ dans l'expression de λ (9.2.4), on peut alors éliminer G en remplaçant, au dénominateur de cette expression la vitesse de débit, **et non pas son carré**, par son expression (9.2.23). On obtient alors pour le coefficient de frottement l'expression :

$$(9.2.26) \quad \lambda \equiv \frac{\Delta p / (L/\phi)}{\frac{1}{2} \rho U_d^2} = \frac{G \phi}{\frac{1}{2} \rho U_d^2} = \frac{2G \phi}{\rho (\phi^2 G / 32\eta) U_d} = \frac{64}{U_d \phi / \nu} = \frac{64}{Re_\phi}$$

Finalement, la loi $\lambda = \lambda(Re_\phi)$ demandée est :

$$(9.2.27) \quad \boxed{\lambda = \frac{64}{Re_\phi}}$$

Pour caractériser les écoulements de conduite, on utilise aussi parfois le **nombre de Poiseuille** :

$$(9.2.28) \quad Po = \lambda Re_\phi$$

D'après (9.2.27), sa valeur théorique est donc :

$$(9.2.29) \quad \boxed{Po = 64}$$

➤ Confrontation aux expériences

La figure 9.3 ci-dessous montre des résultats de mesures du nombre de Poiseuille (9.2.28) et du profil de vitesse. Comme indiqué sur la figure 9.3 (a), ces résultats ont été obtenus dans des tubes de toutes petites dimensions. Les prévisions théoriques (9.2.29) et (9.2.24) sont correctement vérifiées. Mais on constate sur la figure 9.3 (a) une déviation par rapport à la théorie lorsque le nombre de Reynolds Re_ϕ dépasse une certaine valeur. Il existe donc, apparemment, un **nombre de Reynolds critique** Re_c au-delà duquel la théorie de Poiseuille est mise en défaut.

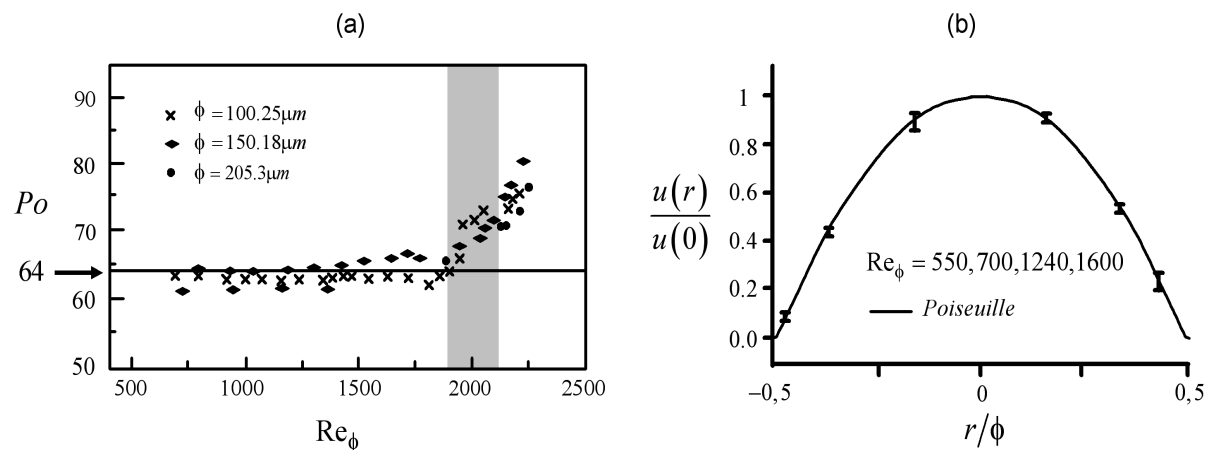


Figure 9.3 - Mesures dans des tubes cylindriques de petits diamètres : (a) nombre de Poiseuille (9.2.28) (Li, Du & Guo, Experimental characteristics of liquid in circular micro-tubes, *Microscale Thermophys. Eng.*, 7, 2003, pp. 253-265), (b) profil de vitesse (Maynes, Webb, Velocity profile characterization in sub-diameter tubes using molecular tagging velocimetry, *Experiments in Fluids*, 2002, pp. 3-15).

Que se passe-t-il au-delà de ce nombre de Reynolds critique ? Cela est révélé par l'expérience montrée sur la figure 9.4. Il s'agit d'une expérience de visualisation par colorant du

comportement du fluide dans une conduite, connue sous le nom d'**expérience de Reynolds**. Elle est commentée dans le point d'histoire effectué plus bas. Elle confirme que lorsque le nombre de Reynolds construit sur la vitesse de débit atteint une valeur critique, l'une des hypothèses de Poiseuille est mise en défaut. Il s'agit de l'hypothèse **H3** : l'écoulement n'est plus permanent. Ce comportement est appelé **crise laminaire**, car il sépare un comportement stationnaire, dit **laminaire**, pour lequel les filets de fluide restent parallèles les uns aux autres (sous forme de « lamelles »), et un comportement instationnaire où les trajectoires de fluide s'entremêlent. Le phénomène est analogue à celui observé sur la figure 8.6 du chapitre précédent pour l'écoulement autour d'un cylindre.

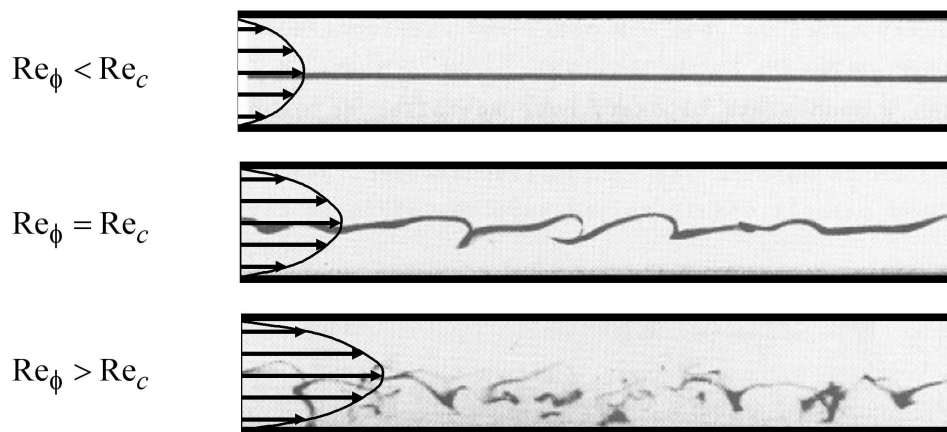


Figure 9.4 - L'expérience de Reynolds : transition vers la turbulence dans une conduite circulaire visualisée au moyen d'un filet de colorant. Les photos sont tirées de Van Dyke (1982). Sur la figure du haut, l'écoulement est dit **laminaire**, tel que $Re_\phi < Re_c \approx 2000$. Lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds, il devient instationnaire, puis **turbulent**.

Conformément à ce que nous avons vu à propos des écoulements stationnaires dans le paragraphe 8.6 du chapitre précédent, l'écoulement de conduite, comme celui autour d'un objet, ne peut donc être considéré comme permanent que dans la mesure où, cf. (8.8.6) :

$$(9.2.30) \quad \boxed{Re_\phi = \frac{U_d \phi}{\nu} \leq Re_c}$$

Les résultats expérimentaux présentés sur les figures 9.3 et 9.4 indiquent que $Re_c \approx 2000$.

➤ Un point d'histoire

Le 15 mars 1883, Osborne **Reynolds** a présenté à la Royal Society de Londres les résultats d'une expérience analogue à celle de la figure 9.4, sous le titre "*An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*" (Royal Society, Phil. Trans., 1883). C'est dans cette publication scientifique historique qu'il a introduit le nombre sans dimension qui porte son nom. Il décrivait ainsi, pour la première fois, le phénomène de la transition vers la turbulence dans un écoulement de fluide. De nombreux aspects de ce phénomène restent encore aujourd'hui mal compris. Notamment, le nombre de Reynolds critique à partir duquel l'écoulement se déstabilise, et pour lequel un consensus a été établi autour de la valeur $Re_c = 2000$ comme indiqué ci-dessus, peut en fait varier de manière significative d'une expérience à l'autre. Ce phénomène de déstabilisation de l'écoulement s'avère en effet très sensible à l'amplitude du « bruit » ambiant de l'expérience. Ce problème reste ouvert et il constitue toujours un important sujet de recherche fondamentale en mécanique des fluides.

A contrario, comme l'indique la référence des travaux de Jean-Louis Marie **Poiseuille** : « *Recherche expérimentale sur les écoulements dans des tubes de très petits diamètres* », Compte rendu de l'Académie des Sciences, 11, 1840, ce chercheur, ancien élève de l'école Polytechnique, s'intéressait à des écoulements à faibles nombres de Reynolds. Ces expériences ne lui ont apparemment pas permis de relever l'apparition d'instationnarités naturelles dans ces écoulements, ce que fera donc Osborne Reynolds quarante ans plus tard.

➤ Conclusion

En conclusion, nous avons obtenu une première solution théorique des équations de Navier-Stokes qui est celle du problème linéaire relatif à l'écoulement unidirectionnel permanent dans une conduite. Toutefois l'expérience montre que la validité de cette solution est limitée à une gamme de nombres de Reynolds finie. Cela confirme nos dires du chapitre précédent sur l'hypothèse des écoulements permanents : seule l'expérience peut définir son domaine de validité. Nous étendrons cette solution théorique aux cas des régimes instationnaires et turbulents dans le dernier chapitre de ce cours.

9.3 L'écoulement autour d'une sphère à petit nombre de Reynolds (second problème de Stokes)

➤ Avant-propos

La résolution de ce second problème est « calculatoire », coordonnées sphériques obligent. Cette résolution est alors proposée sous la forme d'un approfondissement ; seules ses conclusions sont à retenir ici. Trois raisons nous ont poussés à effectuer ce compromis. La première est le grand intérêt applicatif de cette solution comme nous le détaillerons plus bas. La deuxième raison est qu'après examen de la solution du problème développée dans l'approfondissement, le lecteur pourra alors d'autant mieux apprécier la simplicité et l'élégance des raisonnements de l'analyse dimensionnelle qui seront menés dans le prochain chapitre sur le même problème. Enfin, comme pour l'écoulement de Poiseuille, la troisième raison est que la solution de ce problème constitue une référence théorique pour l'analyse phénoménologique des effets de l'augmentation du nombre de Reynolds sur les écoulements de fluide, effets que nous avons déjà illustrés en fait sur la figure 8.6 du chapitre précédent.

Pour ce qui est des applications, ce problème d'écoulement rampant autour d'une sphère peut paraître de portée pratique limitée. Mais il n'en est rien. Il concerne en effet le comportement de petites particules, fluides ou solides, dans un fluide au repos ou en mouvement, et il fournit alors une solution de référence pour tous les problèmes de fluides diphasiques tels que les fumées, les aérosols, les sprays, la pluie, le brouillard, etc. Il constitue aussi un problème de base pour l'application des techniques optiques de mesure de champs de vitesse dans les fluides, telles que la vélocimétrie laser doppler (LDV, pour *Laser Doppler Velocimetry*) et la vélocimétrie par image de particules (PIV pour *Particle Image Velocimetry*), qui sont aujourd'hui largement utilisées dans le domaine de la recherche et de l'industrie. Ces techniques, que nous n'allons pas décrire en détail ici, sont basées précisément sur le suivi du déplacement de petites particules solides ou liquides dans les fluides, et leur hypothèse de validité première est que l'écoulement relatif autour de chacune de ces particules doit être idéalement nul (auquel cas les particules suivent parfaitement le fluide), ou tout du moins le plus lent possible, c.-à-d. sans inertie. La solution du second problème de Stokes constitue pour toutes ces applications un résultat auquel l'on se réfère alors systématiquement.

➤ Énoncé

Comme schématisé sur la figure 9.5, on considère une sphère de rayon a plongée dans un écoulement uniforme à l'infini de vitesse $U_0 \underline{e}_1$.

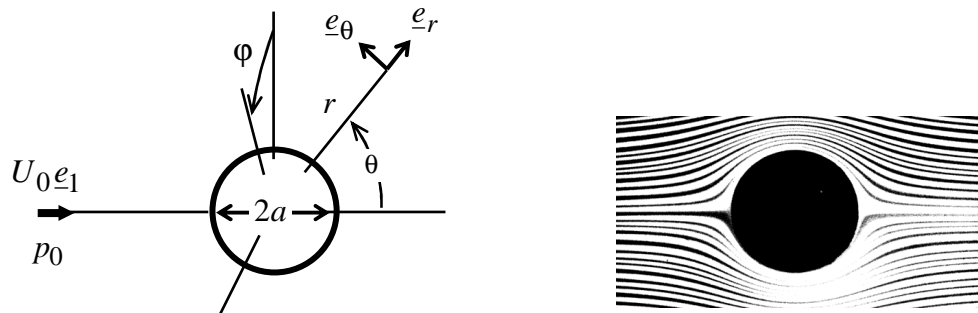


Figure 9.5 - Écoulement rampant autour d'une sphère : (a) définitions, (b) visualisation des lignes de courant pour $Re = U_0 a / \nu = 0.16$ (source : Van Dyke).

On se place dans un repère de coordonnées orthogonales sphériques (r, θ, φ) d'axe \underline{e}_1 et l'on fait les hypothèses suivantes :

- H1** - le fluide est newtonien, incompressible et homogène, de masse volumique ρ ;
- H2** - la viscosité cinématique $\nu = \eta / \rho$ est constante ;
- H3** - l'écoulement est permanent ;
- H4** - on néglige les forces extérieures (notamment : le fluide est considéré comme non-pesant) ;
- H5** - l'écoulement est axisymétrique (indépendant de la coordonnée φ) ;
- H6** - le nombre de Reynolds est supposé très petit, de sorte que l'on puisse considérer l'écoulement comme étant sans inertie (écoulement rampant).

On cherche à déterminer le **coefficient de traînée** de la sphère.

Remarque -

Les deux hypothèses **H4** et **H6** ne sont applicables simultanément que pour de toutes petites particules. En effet, la première condition stipule que $Fr = U_0 / \sqrt{ga} \gg 1$, cf. (8.-.1) ; la seconde impose $Re = U_0 a / \nu \ll 1$, cf. (8.7.1). Cela mène à la condition : $\sqrt{ga} \ll U_0 \ll \nu / a$, soit $a \ll \nu^{2/3} / g^{1/3}$. Dans le cas de l'eau par exemple

$(v \approx 10^{-6} m^2.s^{-1})$ cela donne : $2a \ll 10^{-4} m$. Cela revient donc à considérer des particules dont le diamètre n'excède pas quelques dizaines de microns.

➤ Équations

Le problème dynamique est donc de nouveau décrit par les équations **(8.8.4)** relatives aux **écoulements stationnaires sans inertie** où l'on néglige aussi les effets de la gravité.

$$(9.3.1) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \underline{\operatorname{grad}} p = \eta \Delta \underline{u} \end{cases}$$

Les conditions aux limites pour le champ de vitesse sont celles correspondant à la condition d'adhérence sur la sphère et celle d'un écoulement uniforme à l'infini :

$$(9.3.2) \quad \begin{cases} u_r(a, \theta) = u_\theta(a, \theta) = u_\varphi(a, \theta) = 0 & - \text{ sur la surface de la sphère} \\ \underline{u}(\infty, \theta) = U_0 \underline{e}_1 & - \text{ loin de la sphère} \end{cases}$$

La solution de ce problème a été établie par Stokes en 1851. Elle est détaillée dans un long approfondissement proposé plus bas. En parcourant rapidement ces développements on pourra se rendre compte que la détermination de cette solution « se mérite ».

➤ Solution

Comme détaillé plus bas, la résolution du problème **(9.3.1)** - **(9.3.2)** s'effectue en utilisant une formulation vorticité-fonction de courant de ce système d'équations.

On veut déterminer à partir de cette solution la **force de traînée** de la sphère. Rappelons que la force de traînée, que l'on note \mathcal{D} (pour *Drag*) correspond à la composante parallèle à la vitesse amont du fluide de la force résultante aérodynamique, cf. **(6.5.1)**, **(6.5.2)**. Soit dans le cas présent :

$$(9.3.3) \quad \mathcal{D} = \mathcal{F}_{aéro} \cdot \underline{e}_1 = \oint\!\!\!\oint_{sphère} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_1 \, dS = \oint\!\!\!\oint_{r=a} [(-p \underline{1} + \underline{\tau}) \cdot \underline{n}] \cdot \underline{e}_1 \, dS$$

où \underline{n} désigne ici la **normale sortante** de l'objet, $\underline{n} = \underline{e}_r$. On obtient, tout calcul fait (voir approfondissement, formule (9.4.33)) :

$$(9.3.4) \quad \boxed{\mathcal{D} = 6\pi\eta a U_0}$$

Ce résultat est connu sous le nom de **loi de résistance de Stokes**. Ainsi :

Dans un écoulement à très petit nombre de Reynolds, on trouve que la force de résistance à l'avancement d'un objet est linéairement proportionnelle à la vitesse.

Le coefficient de traînée est obtenu en normalisant la force de traînée par la quantité $\rho(U_0^2/2)S_0$, conformément à la définition (6.5.4). Ici on choisit $S_0 = \pi a^2$. Soit :

$$(9.3.5) \quad \boxed{C_D = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 \pi a^2} = \frac{24}{U_0(2a)/\nu} = \frac{24}{\text{Re}}}$$

➤ Confrontation aux expériences

La figure 9.6 ci-dessous montre des résultats d'expériences sur la mesure du coefficient de traînée C_D de la sphère en fonction du nombre de Reynolds. La prévision théorique (9.3.5) est correctement vérifiée tant que le nombre de Reynolds reste « suffisamment petit ». Cela est conforme à l'hypothèse $\text{Re} \ll 1$ des écoulements rampants (hypothèse **H6**).

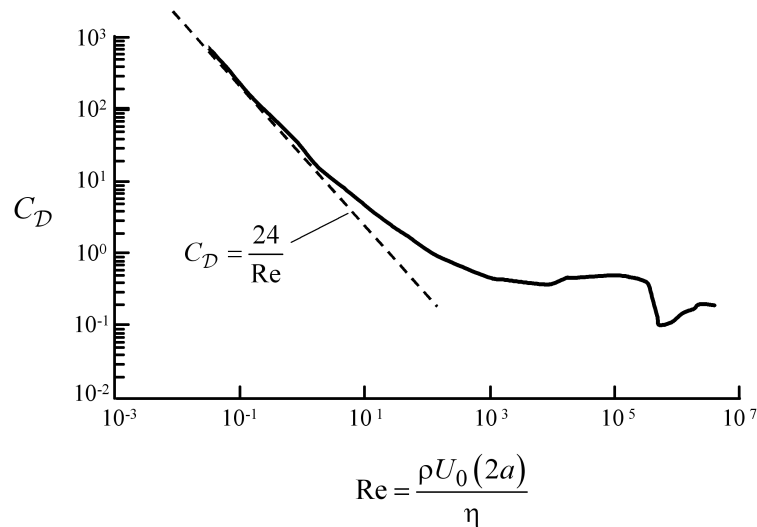


Figure 9.6 - Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds (compilation).

Remarques -

- Au-delà d'une certaine valeur du nombre de Reynolds, qu'il est difficile à déterminer sur la figure ci-dessus, on voit que l'expérience s'écarte de la solution de Stokes. Dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre illustré sur la figure 8.6 du chapitre précédent (soit un écoulement de même nature que celui autour d'une sphère) nous avons signalé l'existence d'un nombre de Reynolds critique Re_c séparant régimes stationnaire et instationnaire de cet écoulement, cf. (8.8.6). Toutefois, le début de la déviation à la loi de Stokes que l'on observe ci-dessus lorsque le nombre de Reynolds Re devient de l'ordre de 1 n'est pas attribuable à l'apparition d'une instationnarité. Il résulte de la violation progressive de la principale hypothèse de l'analyse de Stokes qui est que le Reynolds doit être très petit ($Re \ll 1$) pour pouvoir négliger complètement l'inertie du fluide (hypothèse des écoulements rampants). Cette première déviation à la loi de Stokes peut être capturée de manière analytique comme expliqué à la fin de l'approfondissement ci-après (solution d'Oseen). Comme pour le cylindre, il faut alors dépasser un nombre de Reynolds de l'ordre de quelques dizaines pour que l'écoulement devienne instationnaire, puis turbulent. Il ressemble alors à celui du cylindre de la figure 8.6 (a).

- On observe aussi sur la figure 9.6 que le coefficient de traînée C_D tend ensuite à devenir approximativement indépendant du nombre de Reynolds, mis à part un accident au-delà de $Re = 10^5$, appelée « crise de traînée ». Nous commenterons cela dans le chapitre 13 consacré aux écoulements de fluide parfait ainsi que dans le dernier chapitre consacré à la turbulence.

➤ Application : les gouttes de pluie

Donnons un exemple d'application de ce résultat théorique, celui de la vitesse de chute d'une goutte d'eau dans l'air. Conformément à (9.3.4) l'équilibre dynamique de la particule s'écrit :

$$(9.3.6) \quad \frac{4}{3} \pi a^3 g (\rho_{eau} - \rho_{air}) = \mathcal{D} = 6\pi\eta a U_0$$

Soit pour la vitesse terminale de chute :

$$(9.3.7) \quad U_0 = \frac{2}{9} \left(\frac{\rho_{liq}}{\rho_{air}} - 1 \right) \frac{ga^2}{\nu}$$

Pour des gouttes d'eau de diamètre $d = 2a = 20\mu m$ qui se déplacent dans de l'air ($\rho_{liq}/\rho_{air} \approx 10^3$, $\nu \approx 1.5 \cdot 10^{-5} m^2.s^{-1}$) on obtient $U_0 \approx 1 cm.s^{-1}$. Leur nombre de Reynolds vaut alors $Re = 2aU_0/\nu \approx 10^{-2}$. Dans ce cas l'écoulement se comporte donc bien comme un écoulement rampant. De telles gouttes ne tombent pas car elles sont entraînées par viscosité dans le moindre mouvement de l'air. Les gouttes les plus fines qui précipitent sont les bruines. Leur diamètre est compris entre 100 et 500 μm . Leur vitesse de chute atteint environ un mètre par seconde. Leur nombre de Reynolds devient alors supérieur à 1 et la force de résistance devient inertielle : l'accélération convective $\nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$ n'est donc plus négligeable et le modèle d'écoulement sans inertie n'est plus applicable. De plus, pour les grosses gouttes, la tension superficielle n'est plus suffisante pour maintenir la sphéricité des particules d'eau et celles-ci se déforment sous l'effet de leur propre poids. Le couplage entre la déformation de la goutte et les forces fluides qui la provoquent constitue alors un problème d'une grande complexité.

9.4 Approfondissement ** - Le second problème de Stokes : résolution détaillée

Source : P.K. Kundu & I.M. Cohen, Fluid mechanics, Third Edition, Elsevier Academic Press, 2004.

➤ Formulation en vorticité

La résolution du problème stationnaire sans inertie (9.3.1) – (9.3.2) est facilitée si l'on transforme au préalable ce système en introduisant la vorticité $\underline{\omega} = \underline{rot} \underline{u}$, cf. (2.10.3). En appliquant l'opérateur rotationnel à la loi de la dynamique (9.3.1), l'identité vectorielle $\underline{rot}(\underline{grad} p) = 0$ (cf. Annexe A2.4)  limine la pression. Donc :

$$(9.4.1) \quad \underline{rot} \Delta \underline{u} = 0$$

On utilise alors l'identité vectorielle suivante (cf. annexe A2.4) :

$$(9.4.2) \quad \underline{rot} \Delta \underline{A} = \Delta(\underline{rot} \underline{A}) = -\underline{rot}[\underline{rot}(\underline{rot} \underline{A})]$$

En retenant la première égalité, cela nous ramène à la résolution du système :

$$(9.4.3) \quad \begin{cases} \text{div } \underline{u} = 0 \\ \Delta \underline{\omega} = 0 \end{cases}$$

Il s'agit donc de résoudre une équation de Laplace pour la vorticité de l'écoulement, munie des conditions aux limites sur la vitesse (9.3.2). L'avantage de cette formulation est dû au fait que dans un écoulement bidimensionnel, la vorticité ne possède qu'une composante. Ici le champ de vitesse axisymétrique vérifie :

$$(9.4.4) \quad \underline{u}(r, \theta) = u_r(r, \theta) \underline{e}_r + u_\theta(r, \theta) \underline{e}_\theta, u_\varphi = 0$$

Compte tenu de l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques donnée dans l'annexe A2.1 du chapitre 2, cf. (A2.1.26), il reste :

$$(9.4.5) \quad \begin{cases} \underline{\omega} = \omega_\varphi \underline{e}_\varphi \\ \omega_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \end{cases}$$

Comme expliqué au chapitre 2, les deux composantes de la vitesse d'un écoulement bidimensionnel peuvent par ailleurs s'exprimer en fonction d'une seule fonction scalaire, la fonction de courant, qui est définie en géométrie sphérique par les relations (A2.1.44) :

$$(9.4.6) \quad u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

En remplaçant ces expressions dans (9.4.5), on obtient pour le rotationnel :

$$(9.4.7) \quad \omega_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \psi$$

En utilisant alors la seconde égalité de l'identité vectorielle (9.4.2), le calcul du laplacien sous la forme $\Delta \underline{\omega} = -\text{rot rot } \underline{\omega}$ nécessite tout d'abord celui du rotationnel de la vorticité, $\underline{\omega} = \omega_\varphi \underline{e}_\varphi$, dont l'expression en coordonnées sphériques est :

$$(9.4.8) \quad \text{rot } \underline{\omega} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega_\varphi \sin \theta) \underline{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\varphi) \underline{e}_\theta$$

Le rotationnel de ce vecteur vaut quant à lui :

$$(9.4.9) \quad \text{rot}(\text{rot } \underline{\omega}) = \underline{e}_\varphi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r (\text{rot } \underline{\omega})_\theta \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{rot } \underline{\omega})_r \right].$$

où $(\underline{rot} \underline{\omega})_\theta, (\underline{rot} \underline{\omega})_r$ sont définies en (9.4.8) en fonction de ω_ϕ . Pour $\Delta \underline{\omega} = -\underline{rot} \underline{rot} \underline{\omega}$, on obtient ainsi :

$$(9.4.10) \quad \Delta \underline{\omega} = \frac{e_\phi}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] (r \sin \theta \omega_\phi)$$

➤ La fonction de courant

En remplaçant alors ω_ϕ dans (9.4.10) par son expression (9.4.7), le problème est ramené à la résolution d'une équation différentielle d'ordre quatre pour la fonction de courant :

$$(9.4.11) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi = 0$$

La traduction pour la fonction de courant des conditions aux limites cinématiques (9.3.2) est :

$$(9.4.12) \quad \begin{aligned} \partial \psi / \partial r(a, \theta) &= 0 \leftarrow u_r = 0 \text{ sur la surface} \\ \psi(a, \theta) &= \text{const.} = 0 \leftarrow u_r = 0 \text{ sur la surface} \\ \psi(\infty, \theta) &= \frac{1}{2} U_0 r^2 \sin^2 \theta \leftarrow \underline{u} = U_0 \underline{e}_1 \text{ à l'infini} \end{aligned}$$

La dernière condition suggère alors de rechercher la solution sous la forme

$$(9.4.13) \quad \psi = f(r) \sin^2 \theta$$

En introduisant cela dans l'équation du problème, on obtient (en s'armant de patience) :

$$(9.4.14) \quad \sin^2 \theta \left(f^{iv} - 4 \frac{f''}{r} + 8 \frac{f'}{r^3} - 8 \frac{f}{r^4} \right) = 0$$

La solution est donc de la forme :

$$(9.4.15) \quad f(r) = Ar^4 + Br^2 + Cr + D/r$$

La condition d'écoulement uniforme à l'infini implique $A=0, B=U_0/2$, les deux conditions d'adhérence sur la surface de l'objet donnant alors : $C=-3U_0a/4, D=U_0a^3/4$. D'où :

$$(9.4.16) \quad f(r) = U_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{3ar}{4} + \frac{a^3}{4r} \right).$$

La solution cherchée est donc :

$$(9.4.17) \quad \psi = U_0 \sin^2 \theta \left(\frac{r^2}{2} - \frac{3ar}{4} + \frac{a^3}{4r} \right)$$

Soit, sous forme adimensionnelle :

$$(9.4.18) \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{U_0 a^2} = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} - \frac{3}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{4} \frac{a}{r} \right)$$

Les tubes de courant décrits par cette équation correspondent à la figure 2.39 (b) du chapitre 2. L'examen attentif de cette figure révèle une légère dissymétrie amont aval (un léger évasement du tube de courant) qui résulte d'une mise en défaut de l'hypothèse $Re \ll 1$ que nous commenterons plus bas. Ces surfaces correspondent aussi, approximativement, à celles visualisées sur la figure 9.5 (b) ci-dessus. La forme des lignes de courant dans le repère attaché à la sphère s'obtient en soustrayant à la solution (9.4.18) la contribution de la vitesse amont, qui est représentée par le premier terme. Soit :

$$(9.4.19) \quad \bar{\psi}' = \frac{\psi'}{U a^2} = \sin^2 \theta \left(-\frac{3}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{4} \frac{a}{r} \right)$$

Ces lignes de courant sont celles tracées sur la figure 9.7 ci-dessous.

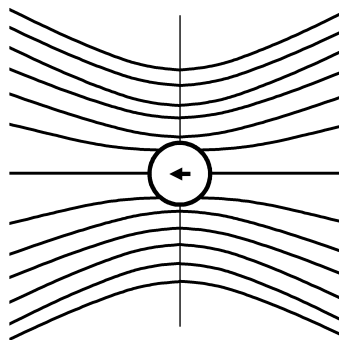


Figure 9.7 - Lignes de courant dans le repère attaché à la sphère.

L'allure de ces lignes traduit le fait que la sphère « pousse » le fluide devant elle et « aspire » le fluide derrière elle. On note la parfaite symétrie de la figure.

➤ **Le champ de vitesse**

À partir de (9.4.17), on obtient pour le champ de vitesse :

$$(9.4.20) \quad \begin{cases} u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \\ u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_0 \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} \right) \end{cases}$$

➤ **Le champ de pression**

L'écoulement étant supposé non-pesant, la pression est alors obtenue en intégrant l'équation de la dynamique (9.3.1), qui s'écrit, moyennant l'utilisation l'identité vectorielle (cf. annexe A2.4) :

$$(9.4.21) \quad \underline{rot} (\underline{rot} \underline{A}) = \underline{grad} (\underline{div} \underline{A}) - \Delta \underline{A}$$

$$(9.4.22) \quad \underline{grad} p = -\eta \underline{rot} \underline{\omega}$$

En développant la composante selon \underline{e}_r de $\underline{rot} \underline{\omega}$ par exemple, on trouve, en détaillant :

$$(9.4.23) \quad \begin{aligned} (\underline{rot} \underline{\omega})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega_\phi \sin \theta) \\ &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] (f \sin^2 \theta) \right] \\ &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(f'' \sin^2 \theta - 2f \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) = -2 \left(\frac{f''}{r^2} - 2 \frac{f}{r^4} \right) \cos \theta \end{aligned}$$

Donc :

$$(9.4.24) \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\eta (\underline{rot} \underline{\omega})_r = 2\eta \left(\frac{f''}{r^2} - 2 \frac{f}{r^4} \right) \cos \theta.$$

En remplaçant f par son expression (9.4.15), puis en intégrant, on trouve :

$$(9.4.25) \quad p(r, \theta) = p_0 - \frac{3a\eta U_0}{2r^2} \cos \theta$$

Remarque -

On note que l'échelle δp qui caractérise la variation de la pression entre l'infini amont et le point d'arrêt frontal de la sphère $\theta = \pm\pi$ vérifie :

$$(9.4.26) \quad \frac{\delta p}{\eta U_0/(2a)} = \frac{p(a, \pm\pi) - p_0}{\eta U_0/(2a)} = 3 = O(1)$$

En l'absence d'inertie, l'échelle caractéristique de variation de la pression dans l'écoulement est donc fixée par la viscosité. Elle vérifie $\delta p \propto \eta U_0/a$ et non pas $\delta p \propto \rho U_0^2$ comme dans un écoulement inertiel où $\rho \nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$ est un terme dominant.

➤ La force résultante

La force de contact résultante vaut :

$$(9.4.27) \quad (\underline{\sigma} \cdot \underline{n})_{r=a} = \left[\left[-(p - p_0) \underline{1} + \underline{\tau} \right] \cdot \underline{n} \right]_{r=a}$$

où $\underline{n} = \underline{e}_r$ et $\underline{\tau} = 2\eta \underline{d}$. Soit :

$$(9.4.28) \quad (\underline{\sigma} \cdot \underline{n})_{r=a} = \left[\left[-(p - p_0) + 2\eta d_{rr} \right] \underline{e}_r + 2\eta d_{r\theta} \underline{e}_\theta \right]_{r=a}$$

La projection de cette force dans la direction de l'écoulement incident définit la contribution locale à la force de traînée. La situation est schématisée sur la figure 9.8 ci-dessous :

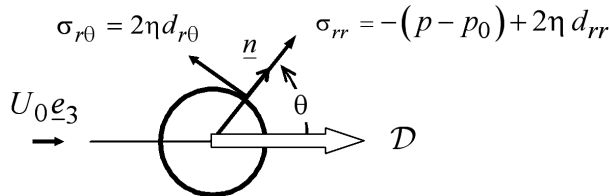


Figure 9.8 - Contraintes sur la sphère et force aérodynamique résultante (traînée).

Cette densité de force vaut :

$$(9.4.29) \quad (\underline{\sigma} \cdot \underline{n})_{r=a} \cdot \underline{e}_3 = \left[\left[-(p - p_0) + 2\eta d_{rr} \right] \cos \theta - 2\eta d_{r\theta} \sin \theta \right]_{r=a}$$

L'expression de la pression p est donnée en (9.4.25) et les deux composantes du tenseur des taux de déformation mises en jeu sont :

$$(9.4.30) \quad \begin{aligned} d_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ d_{r\theta} &= \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$(9.4.31) \quad \begin{aligned} d_{rr} &= U_0 \cos \theta \left(\frac{3a}{2r^2} - \frac{3a^3}{2r^4} \right) \\ d_{r\theta} &= -U_0 \frac{3a^3}{4r^4} \sin \theta \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})_{r=a} \cdot \underline{e}_1 &= \left[\frac{3a\eta U_0}{2r^2} \cos \theta + 2\eta U_0 \cos \theta \left(\frac{3a}{2r^2} - \frac{3a^3}{2r^4} \right) \right] \cos \theta + 2\eta U_0 \frac{3a^3}{4r^4} \sin \theta \sin \theta \Big|_{r=a} \\ &= U_0 \frac{3\eta}{2a} \cos \theta \cos \theta + U_0 \frac{3\eta}{2a} \sin \theta \sin \theta = U_0 \frac{3\eta}{2a} \end{aligned}$$

Donc :

$$(9.4.32) \quad (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})_{r=a} \cdot \underline{e}_1 = U_0 \frac{3\eta}{2a}$$

On note alors, fait remarquable, que cette force par unité de surface est uniforme sur toute la surface de l'objet (elle ne dépend pas de θ). La force traînée, cf. (9.3.3), est alors obtenue en intégrant (9.4.32) sur la surface, donc ici en multipliant cette force unitaire par la surface de l'objet :

$$(9.4.33) \quad \mathcal{D} = \oint\!\!\!\oint_{\text{sphère}} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})_{r=a} \cdot \underline{e}_1 \, dS = 4\pi a^2 \left(U_0 \frac{3\eta}{2a} \right) = 6\pi\eta a U_0$$

C'est la **loi de résistance de Stokes**. Conformément à (9.3.5) le **coefficient de traînée** vaut :

$$(9.4.34) \quad C_D = \frac{24\nu}{U_0(2a)} = \frac{24}{\text{Re}}$$

➤ Limite de validité

Comme annoncé, on voit que ce résultat « se mérite ». Mais malgré tous les efforts consentis pour obtenir cette solution, cette dernière présente un défaut : elle n'est pas uniformément valable dans tout l'espace. En effet, toute l'analyse que nous avons effectuée repose sur le fait que les termes d'inertie

de l'équation de Navier-Stokes sont négligeables du fait de la valeur du nombre de Reynolds. Il faut donc vérifier que tel est le cas. Compte tenu de (9.4.31) :

$$(9.4.35) \quad \tau_{rr} = 2\eta d_{rr} = 2\eta U_0 \cos \theta \left(\frac{3a}{2r^2} - \frac{3a^3}{2r^4} \right),$$

ce qui signifie que dans l'équation du mouvement le terme visqueux $\text{div } \underline{\underline{\tau}}$ décroît, à l'ordre dominant, comme $\eta U_0 a / r^3$:

$$(9.4.36) \quad \|\text{div } \underline{\underline{\tau}}\| \sim \eta U_0 \frac{a}{r^3}$$

Le comportement du terme d'inertie $\nabla \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{u}}$ s'obtient quant à lui à partir des composantes de la vitesse déduite des relations (9.4.6) dans lesquelles on remplace la fonction de courant ψ par son expression trouvée en (9.4.17). On obtient :

$$(9.4.37) \quad \begin{cases} u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^2} \right) \\ u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = U_0 \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \end{cases}$$

Donc, à l'ordre dominant :

$$(9.4.38) \quad \|\nabla \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{u}}\| \sim \rho U_0^2 \frac{a}{r^2}$$

En conclusion :

$$(9.7.39) \quad \frac{\text{inertie}}{\text{frottement}} \sim \frac{\|\nabla \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{u}}\|}{\|\text{div } \underline{\underline{\tau}}\|} \sim \frac{\rho U_0^2 a / r^2}{\eta U_0 a / r^3} = \frac{U_0 a}{\nu} \frac{r}{a} = \text{Re} \frac{r}{a}$$

Il existe alors une distance, telle que $r/a \sim \text{Re}^{-1}$, où l'approximation du fluide sans inertie est mise en défaut. On doit alors corriger la solution de Stokes pour la rendre compatible avec une solution inertielle loin de la sphère. Une solution connue est celle proposée par Oseen (1910). Elle aboutit à une correction des lignes de courant comme schématisé ci-après.

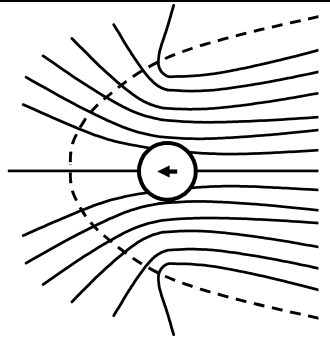


Figure 9.9 - Lignes de courant dans le repère fixe, corrigées pour tenir compte de l'augmentation du nombre de Reynolds avec la distance au centre de la sphère (solution de Oseen).

Chapitre 10

Analyse dimensionnelle et similitude



Chapitre 10. Analyse dimensionnelle et similitude	369
10.1 Analyse dimensionnelle des équations et paramètres de similitude	369
10.2 Le rôle des dimensions fondamentales	369
L'exemple de la traînée d'une sphère	370
Confrontation avec la solution analytique	374
Conclusion	376
10.3 L'analyse dimensionnelle : généralisation	377
10.4 Le théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème Π	379
Dimensions indépendantes : la matrice des exposants aux dimensions	380
Application du théorème Π : méthode	382
10.5 Exemple : le vol	382
Énoncé	382
Question 1 - La portance	383
Solution	383
Question 2 - La vitesse de libération	385
Solution	386
Question 3 - Le régime de croisière des avions	388
Solution	388
Question 4 - Le mur du son	388
Solution	389
Conclusion	390
10.6 Similitude expérimentale	391
Similitude : définitions	391
La similitude complète : un exemple	392
La similitude partielle : un premier exemple	393
Approfondissement * - La similitude partielle : un second exemple	396
10.7 La recherche d'une solution autosemblable	397
Équations	398
La recherche d'une solution autosemblable	400
Solution autosemblable	404
10.8 Approfondissement * - D'autres processus de diffusion moléculaires	406

Annexe

A10.1 Le théorème de Vaschy-Bukingham : démonstration	A10-1
---	-------

Chapitre 10. Analyse dimensionnelle et similitude

10.1 Analyse dimensionnelle des équations et paramètres de similitude

Au **chapitre 8** nous avons pratiqué une **analyse dimensionnelle** des équations de Navier-Stokes consistant à comparer les ordres de grandeur de chacun de leurs termes après les avoir tous normalisés par les mêmes échelles caractéristiques choisies parmi les paramètres disponibles. La forme sans dimension des équations ainsi obtenue nous a permis de quantifier l'importance relative de chacun de leurs termes, donc de chaque mécanisme physique correspondant, au moyen d'un nombre sans dimension approprié :

- ✓ le nombre de Froude Fr
- ✓ le nombre de Mach M
- ✓ le nombre de Reynolds Re
- ✓ le nombre de Prandtl Pr
- ✓ le nombre de Strouhal St
- ✓ ...

Cela a abouti à la définition de diverses classes d'approximation, ou modèles, des équations générales (écoulement de fluide incompressible, écoulement de fluide parfait, écoulement de fluide non pesant, écoulement sans inertie).

L'un des objectifs de l'analyse dimensionnelle est effectivement d'identifier les paramètres sans dimension qui permettent de regrouper les écoulements en **classes semblables**, au sens où l'on peut leur appliquer les mêmes modèles d'équations. Les paramètres sans dimension ci-dessus sont aussi appelés, de ce fait, **paramètres de similitude**.

Dans ce chapitre nous allons exploiter plus avant l'analyse dimensionnelle et les propriétés de similitude qu'elle révèle, cela afin d'obtenir d'autres informations sur ces écoulements.

10.2 Le rôle des dimensions fondamentales

L'exemple de l'écoulement autour d'une sphère à très petit nombre de Reynolds traité dans l'approfondissement « 2 étoiles » qui ponctue le chapitre précédent a permis de souligner que

les solutions analytiques des équations de la mécanique des fluides sont souvent ardues à obtenir. Toutefois, la connaissance exhaustive de l'ensemble des propriétés d'un écoulement, à savoir la formulation analytique de ses différents champs (vitesse, pression, etc.) constitue rarement un objectif en soit. Ce que l'on cherche souvent dans la pratique ce sont des relations entre des **grandeurs globales** (une force résultante par exemple) et les **paramètres**, ou **données**, du problème. On peut alors se demander, sans résoudre effectivement les équations, s'il est possible de prévoir certaines propriétés générales de ces relations à partir des seules données et des propriétés des équations.

Comme nous allons le voir dans ce chapitre, l'analyse dimensionnelle offre cette possibilité. La propriété que nous allons exploiter pour cela est l'**homogénéité dimensionnelle des relations entre les grandeurs physiques**. Cette propriété s'énonce sous la forme d'un principe :

Principe d'invariance dimensionnelle -

La forme de la relation entre les grandeurs physiques que traduit la solution d'un problème ne doit pas dépendre du choix particulier du système d'unités fondamentales que l'on utilise.

➤ **L'exemple de la traînée d'une sphère**

Le problème de la traînée d'une sphère que nous avons analysé dans le chapitre précédent constitue un bon exemple pour illustrer ce principe. Conformément à la figure **10.1** ci-dessous on considère de nouveau une sphère de diamètre $L = 2a$ se déplaçant horizontalement dans un fluide incompressible homogène supposé non-pesant, de viscosité η et de densité ρ constantes, avec une vitesse constante U_0 .



Figure 10.1 - Une sphère se déplaçant dans un écoulement au repos.

On suppose aussi que l'écoulement est **permanent**, mais contrairement au **chapitre 8** on ne fera aucune hypothèse sur le nombre de Reynolds.

On cherche alors de nouveau à déterminer une expression adimensionnelle de la **force de traînée** \mathcal{D} de cette sphère.

Compte tenu des éléments dont nous disposons, on peut écrire que la force de traînée cherchée est une certaine fonction des données du problème, à savoir :

- ✓ la vitesse U_0 ,
- ✓ l'échelle de longueur a
- ✓ la masse volumique ρ ,
- ✓ la viscosité dynamique η .

La solution est donc supposée de la forme :

$$(10.2.1) \quad \mathcal{F}(\mathcal{D}, U_0, a, \rho, \eta) = 0$$

On pourrait être tenté de rajouter à cette liste d'autres paramètres, tels que la pression et la température de l'écoulement amont par exemple. Mais sur la base de notre connaissance des équations du problème, on sait que la pression n'intervient qu'à travers son gradient. Donc nul besoin de faire intervenir une pression de référence. Par ailleurs, la connaissance des fondements de l'approximation du fluide incompressible détaillés au **chapitre 8** nous a enseigné que le problème dynamique et le problème thermique sont découplés dans la mesure où le fluide est incompressible et homogène, comme supposé ici. Donc nul besoin d'évoquer la température. Enfin, puisque le fluide est non pesant et que nous n'avons introduit aucune référence à un forçage instationnaire au niveau des conditions aux limites, la liste ci-dessus peut être considérée comme exhaustive.

On recherche donc une relation entre 5 grandeurs physiques de la forme (10.2.1).

Que nous enseignent alors les expériences ? Celles-ci ont été compilées sur la figure 9.6 du chapitre précédent. Elles montrent que la solution est de la forme :

$$(10.2.2) \quad \bar{\mathcal{G}}\left(C_D = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 (\pi a^2)}, \text{Re} = \frac{U_0 (2a)}{\nu}\right) = 0$$

où, par convention, la barre sur la fonction \mathcal{G} signifie que les arguments de cette fonction sont des grandeurs sans dimension. En comparant ces relations (10.2.1) et (10.2.2), on réalise alors que parmi les cinq paramètres de la relation (10.2.1) trois d'entre eux sont indépendants. On peut remarquer alors (si l'on est très affûté !) que la différence (5-2=3) correspond exactement au nombre de **dimensions fondamentales** mises en jeu dans le problème, à savoir ici : la masse, la longueur et le temps. Explorons les conséquences de cette dernière remarque.

De façon générale, toute variable ou paramètre d'un problème de mécanique possède une dimension qui est une combinaison des quatre dimensions fondamentales suivantes :

dimension	notation	unité
masse	M	kg
longueur	L	m
temps	T	s
température	θ	K

Tableau 10.1 - Les dimensions fondamentales en mécanique.

Remarque -

Il est évident que si le problème mécanique est couplé à d'autres phénomènes physiques, de nature chimique, électromagnétique ou électrique par exemple, d'autres dimensions vont alors intervenir.

Plus précisément : toute grandeur mécanique D est définie par une **fonction de dimensions**, de la forme :

$$(10.2.3) \quad [D] = L^\alpha M^\beta T^\gamma \theta^\delta$$

où le signe $[\cdot]$ signifie « dimension de la grandeur ».

Remarque -

On acceptera ici, sans démonstration, que la fonction de dimensions prend toujours la forme d'un monôme en puissance des quatre dimensions fondamentales du type (10.2.3), ce qui exclut des expressions du type $M \log T$ par exemple.

Mais puisque le problème de la sphère que nous considérons ici est un problème de fluide incompressible homogène qui ne dépend pas de la température, cette dernière n'intervient pas et chacun des cinq paramètres de la relation (10.2.1) possède donc une dimension caractérisée par une fonction de dimensions de type (10.2.3) dans laquelle $\delta = 0$. On a précisément :

$$(10.2.4) \quad [\mathcal{D}] = MLT^{-2}, [U_0] = LT^{-1}, [a] = L, [\rho] = ML^{-3}, [\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

En adimensionnalisant chaque paramètre de la relation (10.2.1) on obtient alors une relation adimensionnelle de la forme :

$$(10.2.5) \quad \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\mathcal{D}}{MLT^{-2}}, \frac{U_0}{LT^{-1}}, \frac{a}{L}, \frac{\rho}{ML^{-3}}, \frac{\eta}{ML^{-1}T^{-1}}\right) = 0$$

Selon le principe d'**invariance dimensionnelle** énoncé ci-dessus, la forme de cette relation ne dépend pas du choix des unités fondamentales. En d'autres termes, elle ne doit pas changer si l'on « compte » la masse en kilogrammes ou en grammes, les longueurs en mètres ou en kilomètres, et le temps en secondes ou en heures. Ce principe nous autorise en particulier à **représenter ces unités en utilisant trois paramètres**, ou **données**, internes au problème (!).

Choisissons par exemple d'exprimer les trois dimensions fondamentales à l'aide des paramètres suivants :

$$(10.2.6) \quad U_0, a, \rho$$

On a dans ce cas :

$$(10.2.7) \quad M = \rho a^3, L = a, T = \frac{a}{U_0}$$

La relation (10.2.5) devient dans ce cas :

$$(10.2.8) \quad \overline{\mathcal{F}} \left(\overline{\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{D}}{\rho U_0^2 a^2}, 1, 1, 1, \overline{\eta} = \frac{\eta}{\rho a U_0} \right) = 0$$

où les grandeurs « barrées » sont sans dimension. On a donc éliminé 3 grandeurs :

$$(10.2.9) \quad \overline{\mathcal{F}} \left(\overline{\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{D}}{\rho U_0^2 a^2}, \overline{\eta} = \frac{\eta}{\rho a U_0} \right) = 0$$

On peut aussi finalement écrire :

$$(10.2.10) \quad \overline{\mathcal{G}} \left(C_{\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 (\pi a^2)}, \text{Re} = \frac{\rho U_0 (2a)}{\eta} \right) = 0$$

Soit :

$$(10.2.11) \quad C_{\mathcal{D}} = C_{\mathcal{D}}(\text{Re})$$

C'est bien ce que traduit l'expérience de la figure 9.6.

Remarque -

On pourra vérifier que tout choix des trois unités indépendantes autre que (10.2.6) aboutit aussi à (10.2.11) moyennant une recombinaison des deux paramètres liés que l'on obtient alors.

➤ **Confrontation avec la solution analytique**

La théorie développée au chapitre précédent était restreinte à l'examen de la condition des écoulements rampants :

$$(10.2.12) \quad \text{Re} = \frac{\rho U_0 L}{\eta} \ll 1$$

Elle aboutissait à la relation cf. (9.3.5) :

$$(10.2.13) \quad C_D = \frac{24}{\text{Re}}$$

L'analyse dimensionnelle effectuée ci-dessus peut-elle fournir cette loi ? La réponse est positive. Pour cela, il faut se rappeler que la condition (10.2.12) signifie que l'inertie de l'écoulement est négligeable devant le frottement visqueux. Sur le plan dimensionnel, l'élimination de l'inertie revient à supprimer dans la relation (10.2.1) la contribution de la masse volumique en tant que paramètre dimensionnant du problème. La masse volumique est en effet absente du jeu des équations (9.3.1) qui décrivent un tel écoulement sans inertie. On considère donc maintenant la relation réduite :

$$(10.2.14) \quad \mathcal{F}(\mathcal{D}, U_0, a, \eta) = 0,$$

dans laquelle la masse volumique a été éliminée et qui est donc valable pour $\text{Re} = \rho U_0 L / \eta \ll 1$. On recherche maintenant une relation entre 4 grandeurs physiques. Il y a toujours 3 dimensions fondamentales. Si l'on choisit pour ces dimensions, en lieu et place de (10.2.6) :

$$(10.2.15) \quad U_0, a, \eta,$$

(puisque l'on n'a plus droit à ρ), on montre sans difficulté que la forme adimensionnelle de (10.2.14) devient :

$$(10.2.16) \quad \overline{\mathcal{F}}\left(\overline{\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{D}}{U_0 a \eta}, 1, 1, 1\right) = 0,$$

D'où :

$$(10.2.17) \quad \frac{\mathcal{D}}{U_0 a \eta} = \text{const.}$$

Cela correspond bien à la **loi de résistance de Stokes (9.3.4)**. Pour le coefficient de traînée on obtient :

$$C_D = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 (\pi a^2)} \propto \frac{U_0 a \eta}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 (\pi a^2)} \propto \frac{\nu}{U_0 a}$$

Soit :

$$(10.2.18) \quad C_D = \frac{const.}{Re}$$

Remarques -

- Dans nos notations, on désigne par *const.* toute fonction constante indéterminée.
- Notons que la relation (10.2.18) aurait pu se déduire directement de la relation plus générale (10.2.8) en éliminant la masse volumique de cette relation grâce à la division du premier nombre sans dimension par le second, soit :

$$\overline{\mathcal{F}}\left(\overline{\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{D}}{\rho U_0^2 a^2}, \overline{\eta} = \frac{\eta}{\rho a U_0}\right) = 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{G}}\left(\frac{\overline{\mathcal{D}}}{\overline{\eta}} = \frac{\mathcal{D}}{U_0 a \eta}, \overline{\eta} = \frac{\eta}{\rho a U_0}\right) = 0$$

Le second argument de cette nouvelle fonction (qui est l'inverse du nombre de Reynolds) doit alors être éliminé si l'on suppose que la solution ne doit pas dépendre de ρ . D'où :

$$\overline{\mathcal{G}}\left(\frac{\mathcal{D}}{U_0 a \eta}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{D}}{U_0 a \eta} = const.$$

Pour terminer, on aura bien noté que ce type d'analyse ne fournit pas la constante, à savoir le préfacteur « *const.* = 24 » obtenu « de haute lutte » dans l'approfondissement du chapitre précédent par la résolution des équations du système de départ.

➤ **Conclusion**

Cette introduction à l'analyse dimensionnelle sur l'exemple de la traînée d'un objet géométriquement simple vise à convaincre le lecteur de l'intérêt de cette approche pour rechercher de solutions approchées qui dégagent les mécanismes fondamentaux d'un problème de mécanique. On retiendra que :

✓ L'analyse dimensionnelle conduit à des expressions entre paramètres sans dimensions tels que (10.2.11), (10.2.18).

✓ La détermination des préfacteurs, c'est-à-dire les constantes de ces relations, ne pourra que très rarement s'effectuer sur une base analytique comme nous avons pu le faire au **chapitre 9** pour le cas de l'écoulement autour d'une sphère (second problème de Stokes) ou pour celui dans une conduite (écoulement de Poiseuille). Ces préfacteurs dépendent en effet de la géométrie exacte de l'écoulement et leur détermination nécessite alors une série d'expériences, ou une série de simulations numériques très précises. C'est le recalage des lois de similitude déduites de l'analyse dimensionnelle sur ces données réelles qui fournira les préfacteurs cherchés.

Cette recherche des lois de similitude s'avère alors particulièrement utile pour les applications car ces dernières consistent très souvent à optimiser les paramètres, ou données d'un écoulement avec l'objectif de maintenir dans une plage de valeurs donnée une grandeur globale. Parmi ce type d'applications, on peut citer : la réduction de la traînée d'un véhicule, la réduction d'un niveau sonore, l'augmentation ou la réduction des échanges de chaleur dans une machine ou dans un bâtiment, etc.

10.3 L'analyse dimensionnelle : généralisation

Nous allons formaliser maintenant les principes méthodologiques généraux de l'analyse dimensionnelle que nous avons appliqués de manière « intuitive » ci-dessus.

On considère pour cela un problème, dit **problème de départ**, constitué par le système (D) qui correspond aux équations générales du problème étudié (pour la mécanique des fluides classiques ce sont les équations de Navier-Stokes) munies de leurs conditions initiales et de leurs conditions aux limites :

$$(10.3.1) \quad (D) \quad \begin{cases} \text{équations (Navier - Stokes)} \\ + \text{conditions initiales et conditions aux limites} \end{cases}$$

On recherche une relation, appelée **relation finale** (F), entre N grandeurs physiques :

$$(F) \quad \mathcal{F}(\underbrace{D_1, D_2, \dots, D_N}_{N \text{ grandeurs physiques}}) = 0$$

où D_1, D_2, \dots, D_N représentent l'ensemble des différentes grandeurs physiques du problème.
Il existe quatre différents types de grandeurs physiques :

$$(10.3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) les variables indépendantes } (x, y, z, t) \\ \text{(ii) les variables dépendantes } (\underline{u}, p, T, \rho, \dots) \\ \text{(iii) les paramètres, ou données (géométries, c.i., c.l., force extérieure...)} \\ \text{(iv) les grandeurs globales (forces résultantes, énergies, puissances...)} \end{array} \right.$$

Précisons ce que l'on entend par **grandeur globale** ci-dessus : c'est une quantité obtenue en intégrant sur les **variables indépendantes** (les coordonnées de l'espace, le temps) des variables ou des combinaisons de **variables dépendantes** (la vitesse, la pression, la température, etc.), ou des fonctions de ces variables (frottement, coefficient de pression, flux de chaleur...).

On peut alors résumer la démarche de l'analyse dimensionnelle comme suit.

Principe de l'analyse dimensionnelle -

Il s'agit d'exploiter les **conséquences** de l'**invariance du problème dans un changement de système d'unités**. Ces **conséquences** peuvent être de trois ordres :

- (1) le système de départ (D) peut être remplacé par un système approché où les équations contiennent moins de termes ;
- (2) le système final (F) peut être simplifié au moyen de la mise en évidence des **paramètres de similitude** (e.g. Re) qui combinent les paramètres, ou données du problème ;
- (3) le nombre de **variables** du système de départ (D) et de sa solution (F) peut être réduit par la mise en évidence de **variables de similitude** qui combinent les variables entre elles.

Nous avons utilisé la conséquence (1) dans le **chapitre 8** lors de la comparaison des ordres de grandeur des différents termes des équations générales. Cela nous a effectivement permis de définir différents jeux d'équations plus réduits que les équations générales de départ. Nous venons par ailleurs d'explorer la conséquence (2) en considérant le cas de la traînée d'une sphère. Nous allons maintenant démontrer le caractère général de ces derniers développements. Cette démonstration s'appuie sur un théorème, le **théorème de Vaschy-Buckingham**, ou théorème Π , qui va nous permettre d'établir une **démarche systématique de détermination des paramètres sans dimension**, les **paramètres de similitude**, démarche que l'on pourra appliquer à toutes relations entre grandeurs physiques. Quant à la conséquence (3), à savoir la recombinaison des variables des équations de départ, elle aboutit à la technique de **recherche de solutions autosembables**, technique à laquelle nous consacrerons le dernier paragraphe de ce chapitre.

10.4 Le théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème Π

Le théorème Π permet de déterminer au moyen d'une approche systématique les paramètres sans dimension ou **paramètres de similitude**, Re, Fr, etc., dont dépend la variation d'une grandeur globale. Ce sont ces paramètres de similitude qu'il faudra alors reproduire à l'égal dans une expérience ou dans une simulation cela afin que celle-ci soit **semblable** au cas réel. Ce théorème peut s'énoncer comme suit :

Théorème Π -

Considérons une relation entre N grandeurs physiques $D_i, i = 1, N$:

$$(10.4.1) \quad (F) \quad \mathcal{F}(D_1, D_2, \dots, D_N) = 0$$

Si r désigne le **nombre de dimensions indépendantes** mises en jeu dans le problème, soit $r \leq 4$ pour un problème de mécanique si la température intervient, et $r \leq 3$ sinon, et si D_1, D_2, \dots, D_r définissent ces dimensions indépendantes, alors on peut regrouper les N paramètres de (F) sous la forme de $(N - r)$ produits sans dimension, sous la forme d'une relation du type :

$$(10.4.2) \quad \overline{\mathcal{F}}(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-r}) = 0$$

$$(10.4.3) \quad \Pi_1 = \frac{D_{r+1}}{D_1^{a_{r+1,1}} \dots D_r^{a_{r+1,r}}}, \dots, \Pi_{N-r} = \frac{D_N}{D_1^{a_{N,1}} \dots D_r^{a_{N,r}}}$$

La démonstration rigoureuse de ce théorème est donnée en annexe. Ses bases sont explicitées ci-après.

➤ **Dimensions indépendantes : la matrice des exposants aux dimensions**

On peut dire que N grandeurs physiques $D_i, i = 1, N$ ont des dimensions indépendantes si :

$$(10.4.4) \quad [D_1]^{a_1} [D_2]^{a_2} \dots [D_N]^{a_N} = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$$

où, conformément à (10.2.3), les fonctions de dimensions D_i sont de la forme :

$$(10.4.5) \quad [D_i] = L^{\alpha_i} M^{\beta_i} T^{\gamma_i} \theta^{\delta_i},$$

Cela traduit le fait qu'aucune des N fonctions de dimensions $[D_i], i = 1, N$ ne peut être représentée comme le produit de puissances des $N - 1$ autres. Dans le cas contraire, ces dimensions sont dépendantes.

En prenant le logarithme de (10.4.4), on obtient alors la relation :

$$(10.4.6) \quad a_1 \log [D_1] + a_2 \log [D_2] + \dots a_N \log [D_N] = 0$$

Soit, compte tenu de (10.4.5) :

$$a_1 \log (L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1} \theta^{\delta_1}) + a_2 \log (L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2} \theta^{\delta_2}) + \dots a_N \log (L^{\alpha_N} M^{\beta_N} T^{\gamma_N} \theta^{\delta_N}) = 0$$

Soit encore :

$$(a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_N \alpha_N) \log L + (a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \dots + a_N \beta_N) \log M \\ + (a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + \dots + a_N \gamma_N) \log T + (a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + \dots + a_N \delta_N) \log \theta = 0$$

Cette égalité étant satisfaite quels que soient L, M, T et θ , on a donc un système homogène de 4 équations à N inconnues :

$$(10.4.7) \quad \begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_N a_N = 0 \\ \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_N a_N = 0 \\ \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_N a_N = 0 \\ \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \dots + \delta_N a_N = 0 \end{cases}$$

La solution de ce système va être déterminée par le rang de la matrice :

$$(10.4.8) \quad \begin{matrix} & D_1 & D_2 & \dots & D_N \\ M & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ L & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_N \\ T & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_N \\ \theta & \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_N \end{matrix}$$

Cette matrice est appelée **matrice des exposants aux dimensions**.

En s'appuyant alors sur un résultat d'algèbre linéaire, on sait que si **le rang r** de la matrice (10.4.8) est $r = N$ le système linéaire (10.4.7) admet comme seule solution la solution triviale $a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$.

Remarque -

Rappelons que le rang d'une matrice est défini comme la taille de la plus grande matrice carrée de déterminant non nul.

Si $r < N$, le système est alors indéterminé, d'ordre $N - r$. On choisit alors parmi les N inconnues, r inconnues principales $a_1 = a_2 = \dots = a_r$. Les $N - r$ inconnues restantes s'expriment alors comme des combinaisons linéaires des inconnues principales.

On en déduit le résultat mathématique suivant :

Propriété de la matrice des exposants aux dimensions -

Soit r le rang de la matrice des exposants aux dimensions de N grandeurs physiques. Seules r grandeurs physiques ont des dimensions indépendantes. Si D_1, D_2, \dots, D_r désignent ces grandeurs de dimensions indépendantes, alors les fonctions de dimensions $[D_i], i = r+1, N$ des $N - r$ grandeurs

restantes s'expriment comme des monômes des fonctions de dimensions $[D_1], [D_2], \dots, [D_r]$, cf. (10.4.2), (10.4.3).

➤ Application du théorème Π : méthode

Pour un écoulement donné dont on ne connaît pas les équations, on pourra alors appliquer la méthode suivante :

Application du théorème Π : méthode -

- (1) Choix des N grandeurs physiques.
- (2) Construction de la matrice des exposants aux dimensions, cf. (10.4.8).
- (3) Détermination du rang r de la matrice des exposants aux dimensions.
- (4) Choix des r grandeurs physiques indépendantes.
- (5) Construction des $N - r$ paramètres sans dimension à partir des r grandeurs physiques indépendantes et à partir des $N - r$ grandeurs physiques restantes, afin d'obtenir une relation du type (10.4.2).
- (6) Arguments physiques supplémentaires, permettant d'éliminer, le cas échéant, certains paramètres sans dimension non pertinents.

Nous allons maintenant appliquer ce « menu » sur un exemple que nous allons traiter sous forme d'exercice.

10.5 Exemple : le vol

➤ Énoncé

Soit un animal de taille caractéristique L volant horizontalement avec une vitesse constante U_0 dans de l'air de viscosité η et de densité ρ constantes,

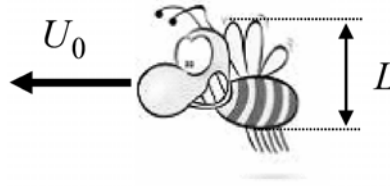


Figure 10.2 - Un animal volant : définitions.

On note \mathcal{L} la force verticale ou force de portance (*lift*) qui équilibre le poids de l'animal (cf. (6.5.3) et figure 6.11).

➤ Question 1 - La portance

Déterminer à l'aide d'une analyse dimensionnelle une relation entre la force de portance \mathcal{L} , la vitesse d'avancement U_0 de l'animal et les caractéristiques physiques du fluide dans lequel il se déplace. Montrer que cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$(10.5.1) \quad \mathcal{L} = \rho_0 U_0^2 L^2 \overline{\mathcal{L}}(\text{Re}, \overline{G})$$

où $\overline{\mathcal{L}}(\text{Re}, \overline{G})$ est une fonction du nombre de Reynolds $\text{Re} = \frac{\rho_0 U_0 L}{\eta_0}$ et où \overline{G} définit la géométrie de l'animal.

Remarques -

- $\overline{\mathcal{L}}$, comme défini en (10.5.1), correspond au coefficient de portance $C_{\mathcal{L}}$ défini en (6.5.4) à un facteur 2 près.
- \overline{G} regroupe un certain nombre de paramètres de forme sans dimension qui définissent la géométrie de l'animal.

➤ Solution

On cherche l'expression adimensionnelle de la portance \mathcal{L} . Le décompte des paramètres ou données du problème nous amène à considérer comme point de départ une relation finale sous la forme :

$$(10.5.2) \quad (F) \quad \mathcal{F}(\mathcal{L}, U_0, L, \rho_0, \eta_0, \overline{G}) = 0$$

Cette relation est similaire à celle obtenue en (10.2.1) avec la portance remplaçant la traînée. Le résultat demandé en (10.5.1) est conforme à la relation (10.2.10). Nous allons redémontrer ici cette relation au moyen du théorème Π . Nous suivons pour cela le menu proposé dans le dernier encadré ci-dessus.

✓ **Étape (1)** - C'est la relation (10.5.2). Le facteur géométrique \overline{G} étant sans dimension, cette relation met en jeu $N = 5$ grandeurs physiques dimensionnelles.

✓ **Étape (2)** - Comme le problème ne dépend pas de la température, il y a trois dimensions fondamentales. La matrice des exposants aux dimensions (10.4.8) s'écrit :

$$(10.5.3) \quad \begin{array}{c} \mathcal{L} \quad L \quad U_0 \quad \rho_0 \quad \eta_0 \\ M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ L & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ T & -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

✓ **Étape (3)** - C'est une matrice de rang $r = 3$. Donc il y a $N - r = 5 - 3 = 2$ paramètres sans dimension auxquels se rajoute \overline{G} .

✓ **Étape (4)** - Choisissons par exemple pour les grandeurs indépendantes :

$$(10.5.4) \quad \rho_0, L, U_0$$

✓ **Étape (5)** - Les deux paramètres sans dimensions libres sont donc de la forme :

$$(10.5.5) \quad \Pi_1 = \frac{\mathcal{L}}{\rho_0^{\alpha_1} L^{\beta_1} U_0^{\gamma_1}}, \Pi_2 = \frac{\eta_0}{\rho_0^{\alpha_2} L^{\beta_2} U_0^{\gamma_2}}.$$

La première et la dernière colonne de la matrice des exposants aux dimensions (10.5.3) nous amène à résoudre les deux petits systèmes suivants :

$$(10.5.6) \quad \Pi_1 : \begin{cases} M & 1 = \alpha_1 \\ L & 1 = -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ T & -2 = -\gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 1, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 2.$$

$$(10.5.7) \quad \Pi_2 : \begin{cases} M & 1 = \alpha_2 \\ L & -1 = -3\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \\ T & -1 = -\gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 1, \beta_2 = 1, \gamma_2 = 1$$

D'où :

$$(10.5.8) \quad \Pi_1 = \frac{\mathcal{L}}{\rho_0 L^2 U_0^2}, \Pi_2 = \frac{\eta_0}{\rho_0 L U_0}$$

Soit :

$$(10.5.9) \quad \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\mathcal{L}}{\rho_0 L^2 U_0^2}, \frac{\eta_0}{\rho_0 L U_0}, \overline{G}\right) = 0$$

Donc :

$$(10.5.10) \quad \boxed{\mathcal{L} = \rho U_0^2 L^2 \overline{\mathcal{L}}(\text{Re}, \overline{G})}$$

C'est la relation (10.5.1) demandée. Soit, pour le coefficient de portance :

$$(10.5.11) \quad C_{\mathcal{L}} = C_{\mathcal{L}}(\text{Re}, \overline{G})$$

Dans les deux prochaines questions, nous allons poursuivre l'examen des propriétés de cette solution et nous allons illustrer ce faisant la puissance de cet outil que constitue l'analyse dimensionnelle.

➤ Question 2 - La vitesse de libération

Soit m_a la masse de l'animal. La figure 10.3 ci-dessous montre une compilation des couples (m_a, U_0) relevés pour diverses espèces d'animaux volants, où U_0 désigne la vitesse de libération pour laquelle la portance équilibre le poids. On y a ajouté des cas d'avions (civils et militaires).

On observe alors une corrélation du type $U_0 \sim m_a^{1/6}$. Retrouver ce résultat à partir d'arguments dimensionnels. On démontrera plus précisément que cette loi est de la forme :

$$(10.5.12) \quad U_0 = m_a^{1/6} \times \mathcal{H}(\rho_a, \rho_0, g, \bar{\mathcal{L}}, \bar{G})$$

où ρ_a désigne la masse volumique de l'animal et où \mathcal{H} est une fonction particulière que l'on déterminera.

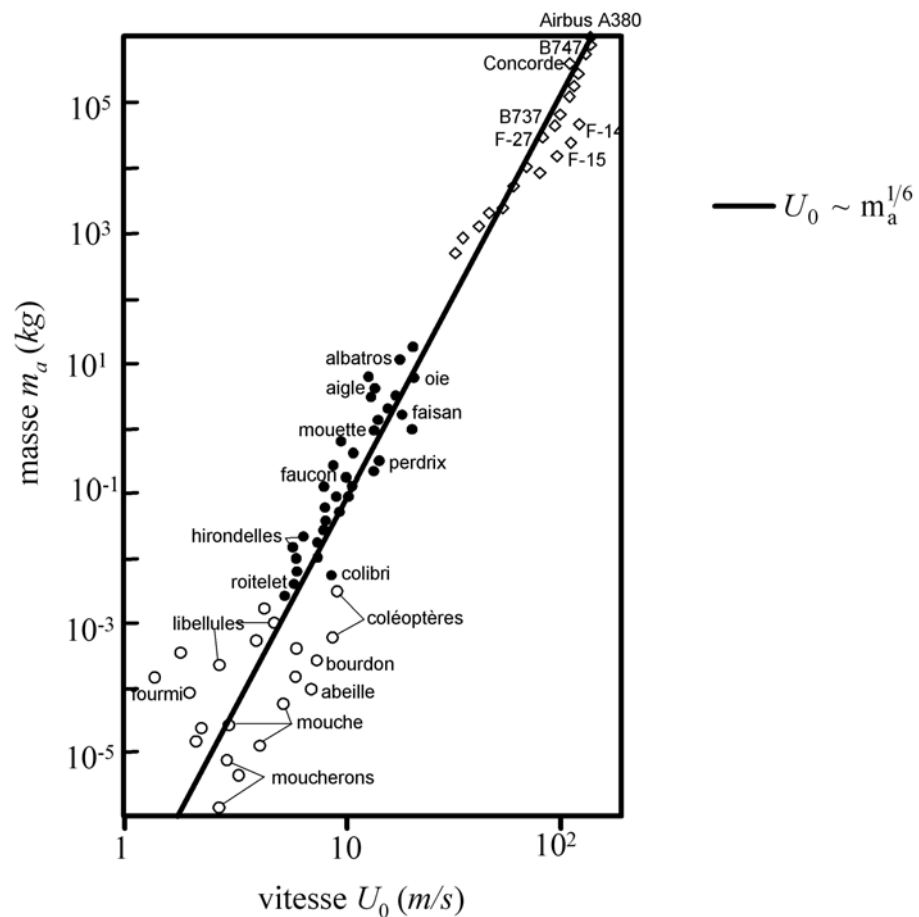


Figure 10.3 - Loi masse-vitesse de libération pour les animaux et les machines volantes (H. Tennekes, The Simple Science of Flight - From Insects to Jumbo Jets, Boston, MIT Press, 1996).

➤ Solution

On cherche une relation entre U_0 et m_a . On écrit pour cela l'équilibre dynamique poids / portance, soit, compte tenu de (10.5.10) :

$$(10.5.13) \quad m_a g = \rho_0 L^2 U_0^2 \overline{\mathcal{L}}$$

La relation demandée (10.5.12) ne fait pas intervenir la longueur L . Il faut donc éliminer ce paramètre. Pour cela on pose :

$$(10.5.14) \quad m_a = \rho_a L^3 \mathcal{V}(\overline{G})$$

où \overline{G} , rappelons-le, définit la géométrie de l'animal (ou de la machine volante). On déduit de cette dernière relation que :

$$(10.5.15) \quad L = \left(\frac{m_a}{\rho_a \mathcal{V}(\overline{G})} \right)^{1/3}$$

En combinant (10.5.13) et (10.5.15), on obtient :

$$(10.5.16) \quad \boxed{U_0 = m_a^{1/6} \mathcal{H}(\rho_a, \rho_0, g, \mathcal{L}, \overline{G})}$$

où la fonction \mathcal{H} demandée vaut :

$$(10.5.17) \quad \boxed{\mathcal{H}(\rho_a, \rho_0, g, \mathcal{L}, \overline{G}) = \frac{\rho_a^{1/3} g^{1/2}}{\rho_0^{1/2} \mathcal{V}^{1/6}(\overline{G}) \mathcal{L}^{1/2}(\text{Re}, \overline{G})}}$$

La compilation présentée sur la figure 10.3 ci-dessus suggère qu'un avion ne fait qu'imiter les oiseaux dont il reproduit le principe de la portance. C'est effectivement le cas (la portance est un phénomène de fluide parfait comme nous le démontrerons dans le chapitre 11). Mais poursuivons l'exploitation de ces relations.

➤ Question 3 - Le régime de croisière des avions

Les vitesses reportées sur la figure **10.3** sont des « vitesses de libération », ou vitesse de décollage. Elles correspondent aux valeurs minimums nécessaires pour que l'animal ou la machine puisse contrebalancer son poids et se libérer ainsi de la pesanteur au niveau du sol. Mais comme précisé dans le tableau **8.3** du **chapitre 8**, dans leur régime de croisière qu'ils atteignent à environ 10km d'altitude les avions de ligne peuvent voler environ 2.5 fois plus vite, soit $U_{\max} \approx 250\text{ms}^{-1}$. Comment y parviennent-ils ?

➤ Solution

Compte tenu des expressions **(10.5.16)** et **(10.5.17)**, la gravité g , la masse m_a , la densité ρ_a et la forme \overline{G} étant données, la vitesse U_0 ne peut varier que grâce aux deux paramètres présents au dénominateur de la fonction \mathcal{H} : la densité de l'air ρ_0 et le coefficient de portance $\overline{\mathcal{L}}(\text{Re}, \overline{G})$. C'est cela qu'exploitent les avions pour augmenter leur vitesse. Plus précisément :

✓ D'une part ils prennent de l'altitude pour atteindre les couches atmosphériques de basse densité. Conformément à la figure **2.4** du **chapitre 2** qui caractérise l'état thermodynamique moyen de l'atmosphère, à 10km la masse volumique de l'air ρ est réduite d'un facteur environ égal à 3, d'où un accroissement possible d'un facteur $\sqrt{3} \approx 1.7$ de la vitesse.

✓ D'autre part, ils modifient leur aérodynamique de manière à réduire le coefficient de portance $\overline{\mathcal{L}}(\text{Re}, \overline{G})$: partant d'une configuration dite *hypersustentée* au décollage, ils adoptent une configuration dite *lisse* en vol de croisière, sans changer significativement leur géométrie \overline{G} ni la fonction volumique $\overline{\mathcal{V}}(\overline{G})$.

C'est donc la combinaison de ces deux facteurs, la décroissance de la masse volumique du fluide et la décroissance du coefficient de portance de l'avion, qui permet à ce dernier d'accroître sa vitesse U_0 conformément à **(10.5.16)** et **(10.5.17)**.

➤ Question 4 - Le mur du son

Si les avions de ligne peuvent aller plus vite en volant plus haut, pourquoi ne dépassent-ils alors pas une altitude plafond d'environ $h = 10\text{km}$?

➤ Solution

Effectivement : si pour une masse donnée on peut gagner de la vitesse avec l'altitude, pourquoi ne pas voler encore plus haut ? Nous venons de voir que, du point de vue de l'analyse dimensionnelle l'existence d'une altitude plafond n'est pas un problème de portance : pour équilibrer le poids à plus haute altitude il suffit d'aller plus vite pour compenser la décroissance de la masse volumique de l'air. Mais on remarque alors que la vitesse de 250m.s^{-1} qui caractérise le régime de croisière d'un avion de ligne est peu différente de la célérité du son dans l'air à l'altitude considérée (environ 300m.s^{-1}). Le nombre de Mach de l'écoulement autour de l'avion, qui est le rapport entre ces deux vitesses, cf. (8.2.14), vaut alors environ $M_0 \approx 0.8$, cf. tableau 8.3. Par ailleurs, en revenant sur le modèle d'atmosphère terrestre présenté sur la figure 2.4 du chapitre 2, on remarque qu'au-delà de $h = 10\text{km}$, la température de l'air varie assez peu ; il en va donc de même de célérité du son. Donc aller plus haut et plus vite entraînerait un accroissement du **nombre de Mach** vers la valeur $M = 1$ qui caractérise le « mur du son ». Les avions de ligne évitent donc de dépasser la vitesse du son. D'où cette altitude plafond.

Remarque -

L'explication est liée à l'apparition d'ondes de choc autour de l'avion quand la vitesse de ce dernier s'approche de la célérité du son. En effet, à l'approche de cette vitesse critique qu'est la vitesse du son, les ondes de déformation du milieu fluide qui constituent le son ne peuvent plus s'éloigner de l'avion vers l'amont, car l'avion va aussi vite qu'elles ; donc elles restent dans son environnement. Au fur et à mesure que l'on s'approche de $M = 1$, on observe alors que ces ondes se concentrent autour de l'avion jusqu'à former des discontinuités macroscopiques qui sont les ondes de choc. La présence de ces ondes de choc entraîne tout d'abord l'apparition d'un comportement instationnaire de l'écoulement autour de l'avion. Ces instationnarités sollicitent alors dangereusement la structure des ailes de ce type d'avions car elles ne sont pas conçues pour cela : voler trop près de Mach 1 est donc exclu pour les avions de ligne. Par ailleurs, pour les avions dessinés pour voler au-dessus de Mach 1 (cas de certains avions militaires, cas du Concorde), on montre que les ondes de choc sont le lieu d'une forte dissipation d'énergie mécanique de l'écoulement. Elles contribuent de ce fait à accroître de manière significative la traînée de l'avion : voler au-delà de Mach 1 (vol « supersonique ») est très dispendieux.

L'existence d'un plafond d'altitude pour les avions de ligne n'est donc pas un problème de portance : c'est un problème de changement de régime de l'écoulement associé à l'apparition d'ondes de choc. D'une part l'écoulement peut devenir instationnaire, et d'autre part les ondes de choc contribuent à accroître la traînée de manière drastique.

Que nous enseigne alors l'analyse dimensionnelle ? Il convient de revenir sur l'analyse de la traînée de la sphère du paragraphe 2 en rajoutant dans la liste des paramètres (10.2.1) relative à la traînée de l'objet la célérité du son c_0 et la géométrie de l'objet \overline{G} , soit en lieu et place de (10.2.1) :

$$(10.5.18) \quad (F) \quad \mathcal{F}(\mathcal{D}, U_0, a, \rho_0, \eta_0, c_0, \overline{G}) = 0$$

Par application du théorème Π on déduit sans difficulté que le coefficient de traînée respecte maintenant une relation du type :

$$(10.5.19) \quad C_D = C_D(\text{Re}, M, \overline{G}),$$

à comparer à la relation (10.2.11) obtenue pour une sphère en écoulement incompressible. Une fois identifiée de la sorte l'importance des paramètres M et \overline{G} , c'est la compréhension physique des phénomènes associés à ces paramètres qui permet de conclure comme nous venons de le faire dans la remarque ci-dessus. L'analyse dimensionnelle indique alors où doit porter l'effort d'interprétation. Ici, c'est sur la nécessité de tenir compte du nombre de Mach et de la forme de la machine. C'est la simulation et, surtout, les expériences qui doivent alors lui emboîter le pas si l'on cherche à expliciter plus avant la relation (10.5.19).

➤ Conclusion

Voilà ce que l'on peut déduire de simples raisonnements basés sur l'homogénéité dimensionnelle des relations entre grandeurs physiques. On pourrait d'ailleurs poursuivre encore cette discussion en explorant d'autres conséquences physiques et biologiques (pour le cas des animaux) de ces quelques relations dimensionnelles.

On espère que ce seul exemple aura convaincu le lecteur de la formidable portée pratique de cette méthode de raisonnement.

10.6 Similitude expérimentale

➤ Similitude : définitions

Nous avons souligné que les solutions analytiques des problèmes de mécanique des fluides sont rares. Faute de posséder une solution mathématique du problème, pour étudier un écoulement de fluide il faut alors réaliser une expérience en laboratoire ou une simulation numérique. Mais dans une expérience, il s'avère souvent impossible de reproduire les échelles réelles du problème, soit parce qu'elles sont trop grandes (cas d'un avion, d'un navire, d'une topographie de rivière, d'un estuaire...), soit trop petites (sédimentation de petites particules, locomotion de micro-organismes...). Quant à la simulation numérique, son caractère virtuel ne l'affranchit pas de respecter les différents rapports d'échelles du problème de sorte que la reproduction de tous les détails de l'écoulement s'avère souvent hors de la portée des moyens informatiques actuels. Dans les deux types d'approche, expérimentale ou numérique, on est ainsi amené à changer les échelles du problème. Il s'agit alors de comprendre quelles règles il faut respecter pour obtenir une solution représentative du problème initial.

Ces règles sont appelées **règles de similitude**. C'est elles qui justifient le développement des nombreux « dispositifs de simulation en similitude » que sont les souffleries ou les bassins d'étude hydrodynamiques utilisés dans tous les laboratoires de mécanique des fluides. Pour ce qui est des simulations numériques, celles-ci s'appuient sur les mêmes règles que l'expérience pour définir la valeur des paramètres que l'on doit introduire dans le système des équations que l'on résout et pour déterminer le maillage de l'espace ainsi que le pas de temps avec lesquels on va suivre l'écoulement sur le plan chronologique.

De façon générale, on peut distinguer deux types de similitude :

- ✓ la **similitude géométrique**,
- ✓ la **similitude dynamique**.

La notion de **similitude géométrique** est évidente : deux problèmes sont dits en similitude géométrique si leurs géométries sont identiques. Comme vu plus haut, toute géométrie peut être caractérisée sur le plan dimensionnel par une échelle de longueur L et par une fonction sans dimension que nous avons notée \overline{G} . Cette fonction regroupe un certain nombre de paramètres de forme sans dimension qui définissent la géométrie de l'objet étudié. Cette fonction, qui peut être très compliquée, constitue le paramètre de similitude géométrique qu'il

convient à l'évidence de respecter en premier lieu (un écoulement autour d'un cube ne peut pas être totalement « semblable » à celui autour d'une sphère).

La **similitude dynamique**, qui inclut les aspects thermiques, nécessite que les nombres sans dimension qui jaugent les différents mécanismes, notamment les cinq nombres Fr , M , Re , Pr , St que nous avons rappelés au début de ce chapitre, soient, sinon égaux, tout du moins du même ordre. Si l'on revient sur les exemples de solutions obtenues au chapitre précédent dans le cas de géométries simples telles que celle de l'écoulement dans un cylindre creux (écoulement de Poiseuille) ou celle de l'écoulement autour d'un objet géométriquement simple (écoulement autour d'une sphère), les résultats répertoriés sur les figures **9.3 (a)** et **9.6** montrent que deux écoulements incompressibles en similitude géométrique sont semblables si leurs nombres de Reynolds sont identiques. Il s'agit donc là d'une règle de similitude dynamique. La similitude dynamique consiste donc à reproduire, entre le cas réel et l'expérience ou la simulation, les mêmes nombres sans dimension que nous avons déjà appelés (pour cette raison) **paramètres de similitude**.

Comme nous l'avons vu, les paramètres de similitude d'un problème de mécanique des fluides peuvent alors être dégagés au moyen de l'application du théorème Π à la solution cherchée de ce problème. Si tous les paramètres de similitude pertinents ainsi identifiés peuvent être reproduits, la **similitude** sera **complète**. Mais il arrive plus fréquemment que la reproduction de l'ensemble des paramètres de similitude du cas réel soit impossible. Comme nous allons le montrer ci-dessous, tel est souvent le cas lorsque la similitude met en jeu plus de deux ou trois paramètres sans dimension. Il faut faire alors des choix et se contenter d'une **similitude partielle**, ou **similitude incomplète**.

Voici quelques exemples de similitudes complètes et de similitudes incomplètes.

➤ La similitude complète : un exemple

Comme vu ci-dessus, le **comportement dynamique d'un écoulement stationnaire de fluide réel incompressible homogène non pesant** ne dépend que du nombre de Reynolds. Soit donc deux écoulements de ce type, un écoulement **(1)** et un écoulement **(2)**. Une fois respectée la similitude géométrique de ces deux écoulements, soit :

$$(10.6.1) \quad \overline{G}_{(1)} = \overline{G}_{(2)},$$

on dira que ces deux écoulements sont **dynamiquement semblables** si :

$$(10.6.2) \quad \text{Re}_{(1)} = \left(\frac{UL}{\nu} \right)_{(1)} = \text{Re}_{(2)} = \left(\frac{UL}{\nu} \right)_{(2)}.$$

Les écoulements obtenus pour deux objets de tailles respectives $L_{(1)}$ et $L_{(2)}$ dans un fluide de même viscosité cinématique, $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = \nu$, sont donc dynamiquement semblables dès lors que leurs vitesses sont dans un rapport inverse de celui de leurs échelles :

$$(10.6.3) \quad \text{Re}_{(1)} = \text{Re}_{(2)} \Leftrightarrow U_{(1)}L_{(1)} = U_{(2)}L_{(2)}$$

La **similitude** entre les deux expériences est alors **complète**. Ce cas est schématisé sur la figure 10.4.

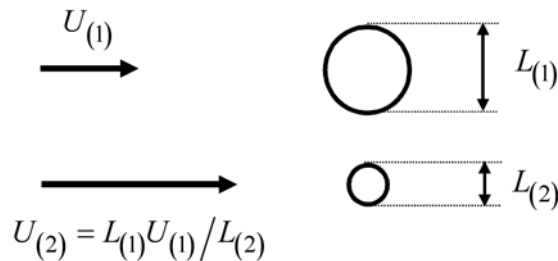


Figure 10.4 - Deux écoulements stationnaires d'un même fluide incompressible homogène non pesant autour d'une sphère : ces deux écoulements ont le même nombre de Reynolds. Ils sont donc semblables (géométriquement et dynamiquement).

➤ La similitude partielle : un premier exemple

Un exemple classique où la similitude dynamique ne peut pas être complète est celui qui met en jeu à la fois un nombre de Reynolds et un nombre de Froude. L'exemple type est celui de la traînée d'un navire. Conformément aux définitions de la figure 10.5 ci-dessous on cherche pour ce cas une relation du type :

$$(10.6.4) \quad \mathcal{F}(\mathcal{D}, L, U, \rho, \eta, m, g, \overline{G}) = 0$$

Dans cette liste, \mathcal{D} désigne la traînée du navire, c'est-à-dire la force résultante qui s'oppose à son avancement. Dans la liste des paramètres, nous avons aussi retenu l'échelle de longueur L qui caractérise la taille du navire, sa vitesse U par rapport au liquide au repos, la densité ρ du liquide, sa viscosité η , la masse m du navire et la gravité g . \overline{G} caractérise la géométrie du navire.

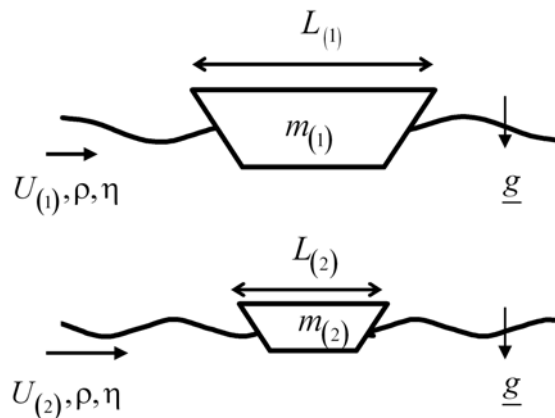


Figure 10.5 - Deux écoulements hydrodynamiques en similitude partielle dans un même liquide (voir texte).

On néglige ce faisant la contribution du frottement de l'air à la traînée du navire. Elle est en effet négligeable devant celle de l'eau compte tenu des rapports des masses volumiques. Par ailleurs, la traînée d'un navire doit aussi tenir compte de la traînée de vague. Cette force est celle qui est nécessaire pour déplacer l'eau de surface, ce qui engendre une variation de la hauteur de l'interface. D'où la présence de la gravité dans la liste des paramètres ci-dessus. Quant à la masse du navire m , combinée à l'échelle L et à la géométrie \overline{G} , c'est elle qui détermine, via la force d'Archimède, le volume immergé et la « surface mouillée » qui est en contact avec le liquide ; c'est donc évidemment un paramètre qu'il est important de prendre en compte. Au total nous retenons donc sept paramètres dimensionnels en plus de la géométrie \overline{G} qui assure la similitude géométrique.

En appliquant le théorème Π à la relation (10.6.4), on trouvera sans difficulté que la matrice des exposants aux dimensions est de rang 3, ce qui implique une relation adimensionnelle entre $(7-3)=4$ paramètres de similitude :

$$(10.6.5) \quad \overline{\mathcal{F}}(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \overline{G}) = 0$$

où :

$$(10.6.6) \quad \Pi_1 = \overline{\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{D}}{\rho U_0^2 L^2}, \Pi_2 = \text{Re} = \frac{\rho U L}{\eta}, \Pi_3 = \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}}, \Pi_4 = \frac{m}{\rho L^3}$$

La similitude en Reynolds et en Froude entre les deux écoulements de la figure 10.5 pour un même liquide (donc une même viscosité) implique alors les relations suivantes :

$$(10.6.7) \quad \begin{aligned} \text{Re}_{(1)} = \text{Re}_{(2)} &\Leftrightarrow U_{(1)} L_{(1)} = U_{(2)} L_{(2)} \\ \text{Fr}_{(1)} = \text{Fr}_{(2)} &\Leftrightarrow U_{(1)} \sqrt{L_{(2)}} = U_{(2)} \sqrt{L_{(1)}} \end{aligned}$$

On voit que la seule solution est l'identité des deux échelles de longueur et celle des vitesses. On ne peut donc pas assurer la similitude dynamique complète, c.-à-d. à la fois une similitude en Reynolds et une similitude en Froude. On ne peut donc pas, dans un même liquide, obtenir au moyen d'un changement de longueurs et de vitesses, un écoulement qui soit **semblable** à celui d'un navire réel.

Un changement de la gravité étant exclu, on peut alors se demander si un changement de la viscosité pourrait remettre les choses en similitude. Cela correspondrait alors aux relations :

$$(10.6.8) \quad \begin{aligned} \text{Re}_{(1)} = \text{Re}_{(2)} &\Leftrightarrow U_{(1)} L_{(1)} \nu_{(2)} = U_{(2)} L_{(2)} \nu_{(1)} \\ \text{Fr}_{(1)} = \text{Fr}_{(2)} &\Leftrightarrow U_{(1)} \sqrt{L_{(2)}} = U_{(2)} \sqrt{L_{(1)}} \end{aligned}$$

Soit :

$$(10.6.9) \quad \frac{L_{(1)}^{3/2}}{\nu_{(1)}} = \frac{L_{(2)}^{3/2}}{\nu_{(2)}}$$

Ainsi, si l'indice (1) se réfère au navire réel, réduire la taille revient à réduire la viscosité cinématique du liquide. Mais cela est très difficile (on peut facilement l'augmenter, mais pas la réduire).

En conclusion, l'analyse de la traînée d'un navire au moyen d'un dispositif expérimental, tel qu'un bassin d'essai de carènes ne permet pas de réaliser une similitude complète du problème. On se limite alors à la similitude en Froude, comme sur l'exemple de la figure 10.6

ci-dessous, car l'expérience montre que la traînée de vague est la contribution la plus importante à la traînée totale. Les ingénieurs ont alors développé des méthodes qui permettent de **corriger** les résultats obtenus pour tenir compte de l'influence du frottement.

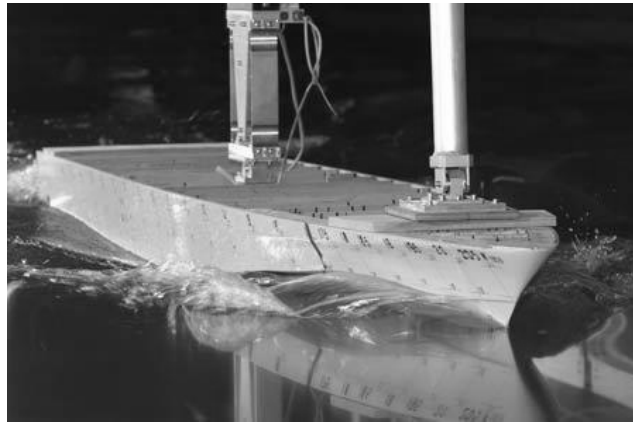


Figure 10.6 - Maquette de navire dans un bassin d'essai des carènes (Crédit photo : DGA).

➤ **Approfondissement * - La similitude partielle : un second exemple**

Un dernier exemple, toujours dans le domaine de l'expérimentation industrielle, est celui de l'aérodynamique des avions. Comme vu dans le paragraphe précédent, voir question 4, pour un avion en vol de croisière la compressibilité intervient et le nombre de Mach rentre dans la liste des paramètres de similitude, cf. (10.5.19). Pour évaluer la traînée d'un avion avec une maquette placée dans une soufflerie, on doit ainsi réaliser une similitude dynamique qui reproduit le nombre de Reynolds et le nombre de Mach. On doit reproduire en premier lieu le nombre de Mach. On peut alors montrer que la similitude dynamique complète est possible si l'on pressurise la soufflerie. En effet, la pressurisation de l'air augmente sa masse volumique et réduit alors sa viscosité cinématique. Cela contribue à accroître le nombre de Reynolds qui, par ailleurs, est réduit par le changement d'échelle.

Remarque -

Pour fixer les idées sur la réduction d'échelle, les plus grandes souffleries existantes peuvent accueillir des maquettes (ou des demi-maquettes) d'avions à l'échelle 1/10^{ème}.

Rappelons aussi que le nombre de Mach est le rapport entre la vitesse et la célérité du son. Dans un gaz parfait cette célérité est entièrement déterminée par la température. Pour un nombre de Mach donné (on montre que le nombre de Mach est entièrement fixé par la forme du conduit de la soufflerie) on peut alors augmenter la vitesse qui intervient au numérateur du nombre de Reynolds en réduisant la vitesse du son, c'est à dire en refroidissant le fluide. On utilise pour cela des techniques cryogéniques.

Donc la similitude compressible complète en aérodynamique est possible. Mais elle est très onéreuse. En Europe, il existe une seule soufflerie pressurisée et cryogénique capable de reproduire à la fois les nombres de Mach et les nombres de Reynolds qu'explorent les avions de ligne.

Comme pour les navires, les ingénieurs ont alors développé des méthodes pour corriger les résultats d'une expérience sans similitude de Reynolds à partir d'expériences obtenues en similitude de Mach dans des souffleries plus classiques, c-à-d. non pressurisées et non cryogénisées. Un exemple d'une telle soufflerie est montré sur la figure 10.7.

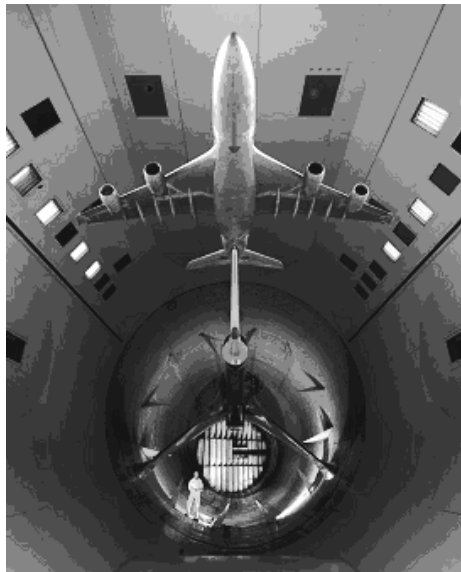


Figure 10.7 - Maquette d'Airbus A340 à l'échelle 1/12.5 dans la soufflerie transsonique S1-Ma de l'Onera assurant la similitude de Mach (Crédit photo : Onera-Airbus).

10.7 La recherche d'une solution autosemblable

Nous allons terminer ce chapitre sur la similitude par l'examen de la troisième conséquence du principe de l'analyse dimensionnelle précisée dans l'encadré du paragraphe 10.3, à savoir la possibilité offerte par le principe d'invariance du problème dans un changement de systèmes d'unités de réduire le nombre de **variables** du système de départ (D) (les équations du problème) en faisant apparaître des **variables de similitude** qui combinent les **variables** entre elles.

On va se limiter pour cela à l'étude d'un cas particulier qui est celui de l'écoulement unidirectionnel engendré par le mouvement d'une plaque. C'est le cas présenté sur la figure 8.4 (b) du chapitre 8. Le schéma de l'écoulement est repris sur la figure 10.8 ci-dessous. Ce problème est connu sous le nom de **premier problème de Stokes**.

Soit donc l'écoulement bidimensionnel d'un fluide induit par une plaque plane solide de longueur L en translation uniforme. Nous savons que par adhérence et frottement la plaque entraîne de proche en proche le fluide. La quantité de mouvement se propage ainsi verticalement à partir de la paroi et cela engendre un écoulement dont l'épaisseur $\delta(t)$ augmente avec le temps. L'instant $t = 0$ correspond à la mise en mouvement de la plaque, et à cet instant, $\delta = 0$. L'écoulement est donc instationnaire.

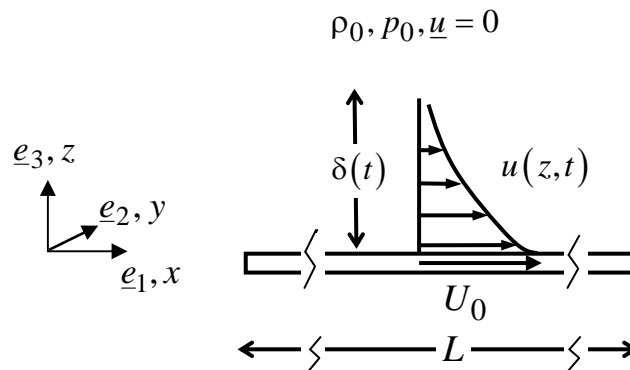


Figure 10.8 - Déplacement d'un fluide par une plaque plane de grande longueur en translation uniforme (premier problème de Stokes) : définitions.

On fait les hypothèses suivantes :

- H1** - le fluide est newtonien, incompressible et homogène, de masse volumique ρ ;
- H2** - la viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ est constante ;
- H3** - on néglige les forces extérieures (notamment, le fluide est considéré comme non-pesant) ;
- H4** - l'écoulement est unidirectionnel, son champ de vitesse étant de la forme :

$$(10.7.1) \quad \underline{u} = u(z, t) \underline{e}_1.$$

Il s'agit alors de déterminer la solution générale de cet écoulement.

➤ Équations

Compte tenu des hypothèses ci-dessus, le système d'équations relevant de ce problème est le système (8.7.3) relatif aux écoulements de fluide incompressible homogène de viscosité

constante sans inertie, équation dans lesquelles on néglige de plus le potentiel des forces extérieures :

$$(10.7.2) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = - \underline{\operatorname{grad}} \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \underline{u} \end{cases}$$

Notons que bien que l'écoulement soit sans inertie, dans ce problème instationnaire on doit conserver la dérivée par rapport au temps. Compte tenu de (10.7.1), cela donne :

$$(10.7.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ 0 = - \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

D'après la deuxième équation, la pression vérifie :

$$(10.7.4) \quad p = p(x, t)$$

A priori, la pression peut donc dépendre de x . Mais en $z \rightarrow \infty$, elle doit coïncider avec la pression de l'écoulement au repos qui est supposée constante. D'où l'on déduit que la pression p ne dépend ni de x ni du temps. En définitive, le problème se ramène donc à la résolution de l'équation :

$$(10.7.5) \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

On reconnaît ici une **équation de diffusion**, du type « équation de la chaleur » ou équation de Fourier scalaire. La résolution de cette équation qui contient une dérivée temporelle et une double dérivée spatiale nécessite une condition initiale et deux conditions aux limites, soit ici :

$$(10.7.6) \quad \begin{cases} u(z, t = 0) = 0 \\ u(z = 0, t) = U_0 \\ u(z = \infty, t) = 0 \end{cases}$$

➤ **La recherche d'une solution autosemblable**

Il existe plusieurs méthodes mathématiques pour résoudre les équations du type (10.7.4), la plus classique étant celle basée sur la transformée de Laplace. Nous privilégierons ici une autre méthode, disons plus « élégante », qui repose sur les raisonnements dimensionnels de ce chapitre. Cela consiste à rechercher des **solutions autosemblables**. Nous allons définir cette notion.

On opère en suivant trois étapes.

✓ **Étape 1** - On effectue tout d'abord sur **toutes les variables** et **paramètres** du problème (10.7.5) - (10.7.6), soit ici (u, z, t, U_0, v) , le changement de variable correspondant à la **transformation affine** suivante :

$$(10.7.7) \quad u = a \hat{u}, z = b \hat{z}, t = c \hat{t}, U_0 = d \hat{U}_0, v = e \hat{v}$$

où (a, b, c, d, e) désignent cinq facteurs multiplicatifs arbitraires. On ne précise pas ici la nature dimensionnelle des facteurs du groupe de transformation affine (10.7.7), donc celle des nouvelles variables « tildées ». Le problème (10.7.5) - (10.7.6) devient :

$$(10.7.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \frac{c e}{b^2} \hat{v} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} \\ a \hat{u}(\hat{z}, \hat{t} = 0) = 0 \\ a \hat{u}(\hat{z} = 0, \hat{t} \geq 0) = d \hat{U}_0 \\ a \hat{u}(\hat{z} = \infty, \hat{t}) = 0 \end{cases}$$

✓ **Étape 2** - En s'appuyant sur le **principe d'invariance dimensionnelle**, on cherche parmi les groupes de transformation multiplicatifs (a, b, c, d, e) ceux qui laissent le problème initial (10.7.5) - (10.7.6) invariant dans cette transformation. On voit immédiatement à partir de

(10.7.8) que cette classe de transformations est entièrement définie par les deux relations suivantes :

$$(10.7.9) \quad \begin{cases} \frac{c e}{b^2} = 1 \\ a = d \end{cases}$$

Les groupes de transformation affine à cinq facteurs qui laissent le problème initial invariant possèdent donc **trois facteurs indépendants** et **deux facteurs liés** (dépendants des trois premiers).

✓ **Étape 3** - Soit :

$$(10.7.10) \quad \mathcal{F}(u, z, t, U_0, v) = 0$$

la solution du problème (10.7.5)-(10.7.6). En appliquant la transformation (10.7.7)-(10.7.9) qui laisse le problème invariant, la solution vérifie aussi :

$$(10.7.11) \quad \begin{cases} \mathcal{F}(a\hat{u}, b\hat{z}, c\hat{t}, d\hat{U}, e\hat{v}) = 0 \\ c e = b^2 \\ a = d \end{cases}$$

Cette affirmation repose sur un principe, dû à Birkhoff (1950), qui est défini par l'énoncé suivant :

Principe de Birkhoff -

Si les hypothèses d'une théorie sont invariantes dans un groupe de transformations, il en est de même de ses conclusions.

On entend ici par « hypothèses », les équations d'un problème, et par « conclusion », sa solution (Huerre, 2005).

En recombinaut les arguments de la fonction \mathcal{F} (10.7.11), la solution du problème peut aussi s'écrire sous la forme :

$$(10.7.11) \quad \mathcal{G}\left(\frac{u}{U_0} = \underbrace{\frac{a}{d}}_{=1} \frac{\hat{u}}{\hat{U}_0}, \frac{z}{\sqrt{vt}} = \frac{b}{\underbrace{\sqrt{ce}}_{=1}} \frac{\hat{z}}{\sqrt{\hat{t}\hat{v}}}, \cancel{\hat{t}}, \cancel{d\hat{U}_0}, \cancel{\hat{v}}\right) = 0$$

où l'on a éliminé les trois derniers arguments de \mathcal{G} car la relation ne doit plus dépendre du choix particulier des facteurs restants dans cette relation, ici les facteurs c , d et e . En effet, si tel n'était pas le cas, c.-à-d. si la fonction \mathcal{G} dépendait de l'un ou plus de ces facteurs, on limiterait alors de manière arbitraire l'espace des solutions possibles.

Donc la solution du problème de départ doit vérifier :

$$(10.7.12) \quad \mathcal{G}\left(\frac{u}{U_0}, \frac{z}{\sqrt{vt}}\right) = 0$$

Soit encore :

$$(10.7.13) \quad \boxed{\frac{u}{U_0} = f\left(\frac{z}{\sqrt{vt}}\right)}$$

✓ **Remarque** - On peut obtenir ce même résultat en appliquant une technique consistant à « mimer » la démarche effectuée dans l'analyse basée sur le théorème II. On considère pour cela la solution générale du problème transformé (en variables « chapeau ») que l'on écrit :

$$(10.7.14) \quad \hat{\mathcal{F}}\left(\hat{u} = \frac{u}{a}, \hat{z} = \frac{z}{b}, \hat{t} = \frac{t}{c}, \hat{U} = \frac{U_0}{d}, \hat{v} = \frac{v}{e}\right) = 0$$

On sait que le problème de départ (les équations) sont invariantes dans la transformation affine de facteurs (a, b, c, d, e) si ces facteurs vérifient les deux relations (10.7.9). Si l'on choisit alors les trois facteurs libres restants *parmi les variables et paramètres du problème*, par exemple :

$$(10.7.15) \quad \begin{cases} a = U_0 \\ c = t \\ e = v \end{cases}$$

compte tenu de (10.7.9), il vient :

$$(10.7.16) \quad \begin{cases} d = a = U_0 \\ b = \sqrt{ce} = \sqrt{vt} \end{cases},$$

Soit en remplaçant dans (10.7.14) :

$$(10.7.14) \quad \hat{\mathcal{F}}\left(\hat{u} = \frac{u}{U_0}, \hat{z} = \frac{z}{\sqrt{vt}}, 1, 1, 1\right) = 0$$

D'où (10.7.13).

Les variables sans dimension :

$$(10.7.17) \quad \begin{cases} \bar{u} = \frac{u(z,t)}{U_0} \\ \eta(z,t) = \frac{z}{\sqrt{vt}} \end{cases}$$

sont appelées **variables de similitude** car elles permettent d'établir une équivalence entre toutes solutions $u(z,t)$ vérifiant $\eta(z,t) = \text{const.}$. En effet, quelles que soient les valeurs de U_0 , v , z et t , la valeur de $u(z,t)/U_0$ au point z et à l'instant t est la même que celles obtenues pour des valeurs différentes de U_0 , z et t , cela dans la mesure où z et t vérifient $\eta(z,t) = \text{const.}$. La relation (10.7.16) définit une classe de solutions dites **autosemblables** (on dit aussi **autosimilaires**) du problème (10.7.5) - (10.7.6).

Remarque -

On prendra soin de ne pas confondre la variable de similitude $\eta(z, t) = z/\sqrt{\nu t}$ avec le coefficient de viscosité dynamique de cisaillement η .

➤ **Solution autosemblable**

On cherche donc la solution **autosemblable** de (10.7.5) sous la forme (10.7.13). Cela revient à effectuer le changement de variables $(z, t) \rightarrow (z, \eta(z, t))$. On montre que ce changement de variables transforme l'équation aux dérivées partielles (10.7.5) en l'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre :

$$(10.7.18) \quad \boxed{f'' + \frac{1}{2}\eta f' = 0}$$

Démonstration -

Pour les deux dérivées partielles mises en jeu dans l'équation (10.7.5), on a : $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\nu z}{(\sqrt{\nu t})^3} = -\frac{1}{2} \frac{\nu \eta^3}{z^2}$,

$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{\nu t}} = \frac{\eta}{z}$ le changement de variables $(z, t) \rightarrow (z, \eta(z, t))$ implique pour toute fonction $u(z, t) = g(z, \eta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) g(z, \eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} g(z, \eta) = -\frac{1}{2} \frac{\nu \eta^3}{z^2} \frac{\partial}{\partial \eta} g(z, \eta), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) g(z, \eta) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) g(z, \eta) = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\eta}{z} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) g(z, \eta). \text{ Pour } g(z, \eta) = f(\eta), \text{ il reste : } \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\nu \eta^3}{z^2} f', \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\eta}{z} f'. \end{aligned}$$

La dérivée seconde en espace vaut alors : $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\eta}{z} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{\eta}{z} f' = -\frac{\eta}{z^2} f' + \frac{\eta}{z} \left(\frac{1}{z} f' + \frac{\eta}{z} f'' \right) = \frac{\eta^2}{z^2} f''$.

L'équation différentielle devient : $-\frac{1}{2} \frac{\nu \eta^3}{z^2} f' = \frac{\nu \eta^2}{z^2} f''$. Soit en définitive : $f'' + \frac{1}{2}\eta f' = 0$.

La condition initiale et les deux conditions aux limites (10.7.6) se réduisent quant à elles à deux conditions aux limites, comme le nécessite la résolution de ce type d'équation. Ces deux conditions aux limites s'écrivent :

$$(10.7.19) \quad \boxed{f(0) = 1, f(\infty) = 0}$$

On pourra alors vérifier que la solution de l'équation différentielle ordinaire ci-dessus munie de ces conditions aux limites est :

$$(10.7.20) \quad \boxed{\frac{u}{U_0} = f(\eta) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)}$$

où la fonction erf , appelée fonction d'erreur, est définie comme suit :

$$(10.7.21) \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

L'allure de cette solution autosimilaire est tracée sur la figure 10.9 (b) ci-dessous.

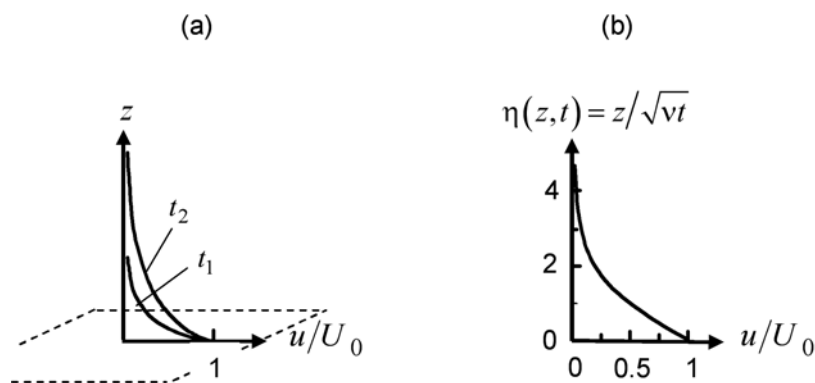


Figure 10.9 - Solution de l'équation du mouvement pour le premier problème de Stokes : (a) profil de vitesse $u(z,t)/U_0$, (b) forme autosemblable $u/U_0 = f(\eta = z/\sqrt{vt})$.

➤ Les échelles de la diffusion

Nous venons donc de démontrer que la solution de l'équation de diffusion à laquelle se réduit la loi dynamique dans le cas du premier problème de Stokes est **autosemblable** dans le sens où elle devient unique si l'on normalise la vitesse par l'échelle de vitesse U_0 et z par l'échelle de longueur :

$$(10.7.22) \quad \delta(t) = \sqrt{\nu t}$$

Cette échelle définit la **longueur caractéristique de diffusion** de la quantité de mouvement à l'instant t . C'est l'épaisseur de la couche de fluide qui a été accélérée de manière sensible par le frottement visqueux au bout d'un temps t .

Quel est le temps caractéristique de ce phénomène ? Pour quantifier cela il faut considérer une échelle verticale h donnée et calculer le **temps de diffusion** :

$$(10.7.23) \quad \tau_v(h) \sim h^2/\nu$$

qui caractérise la durée nécessaire pour que le fluide ressente le mouvement de la plaque à l'altitude h . Des valeurs caractéristiques pour la viscosité cinématique ν ont été tabulées dans le **chapitre 2**, cf. tableau **2.1** : une valeur caractéristique pour l'air est $\nu = 1,37 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, de sorte que l'on trouve une durée d'environ 10 s pour la mise en mouvement d'une couche d'air égale à 1 cm ; pour une couche de 1 m d'air, il faut compter environ 10^5 s , soit environ une journée. Pour un liquide tel que l'eau qui, comme nous l'avons vu, possède une viscosité cinématique 10 fois plus faible, ces temps sont multipliés par 3 environ. On pourra alors juger, à juste titre, que la diffusion du mouvement par la viscosité est un processus relativement lent. Nous verrons dans le dernier chapitre de ce cours que ce processus peut être accéléré par le truchement d'un nouveau comportement de nature dynamique déjà évoqué, qui est la turbulence.

10.8 Approfondissement * - D'autres processus de diffusion moléculaires

Nous nous intéressons ici à d'autres problèmes classiques de diffusion : la diffusion de masse et la diffusion de la chaleur. Ces deux types de diffusion sont illustrés par les exemples pratiques schématisés sur la figure **10.10** ci-dessous : la diffusion du sucre dans une tasse de café et la propagation de la chaleur par conduction dans une pièce.

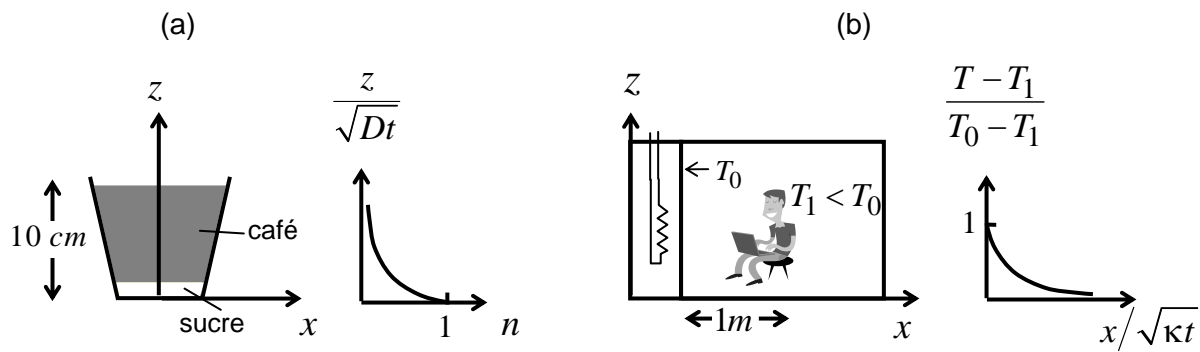


Figure 10.10 - Deux problèmes de diffusion : (a) diffusion de la concentration de sucre dans un verre de café, (b) propagation de la chaleur par conduction dans une pièce. Pour chaque cas, une solution autosimilaire identique à celle de la diffusion de la quantité de mouvement précédente est obtenue en imposant des conditions aux limites de type « semi-infini » (voir texte)

Compte tenu de la complexité des conditions aux limites de ces écoulements, leur solution exacte est tout à fait hors de notre portée. Notamment, il ne faut pas espérer obtenir une solution autosemblable. On ne peut en effet obtenir une solution autosemblable comme dans le cas précédent que lorsque les conditions aux limites des équations différentielles n'imposent pas d'échelles caractéristiques naturelles dans la ou les directions de similitude. Dans le premier problème de Stokes traité précédemment aucune échelle de temps ou d'espace n'était imposée par les conditions aux limites, ni en espace ni en temps. La solution n'aurait plus été autosemblable si l'on avait modifié la vitesse de déplacement U_0 de la plaque à un instant donné, ou si une seconde plaque solide horizontale se trouvait à une altitude finie (ce second cas correspond au problème de Couette de la figure 8.6 (c)). Les deux problèmes de la figure 10.10 sortent donc résolument de ce cadre idéal. Toutefois, notre objectif n'est pas d'obtenir des solutions exactes, mais il est de déterminer les échelles principales qui caractérisent ces processus de diffusion. On élimine alors la complexité résultant des géométries mises en jeu en réduisant les conditions aux limites à celles de géométries semi-infinies. On impose pour cela :

- ✓ pour le problème de la figure 10.10 (a) : l'invariance selon x et y , et le rejet à l'infini de la condition à la limite supérieure dans la direction z ;
- ✓ pour le problème de la figure 10.10 (b) : l'invariance selon y et z , et le rejet à l'infini de la condition à la limite supérieure dans la direction x .

Dans ces conditions, les équations qui décrivent ces deux problèmes sont de la même nature que celles du premier problème de Stokes traité précédemment. Pour la diffusion de masse, on obtient :

$$(10.8.1) \quad \frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}$$

où $n(z, t)$ désigne la concentration du constituant (c.-à-d. le nombre de particules par unité de volume, ici le glucose) et où D est la diffusivité moléculaire de ce constituant dans le milieu considéré, en $m^2 s^{-1}$. La solution est :

$$(10.8.2) \quad n = f\left(\frac{z}{\sqrt{Dt}}\right)$$

Pour la diffusion de température, il vient :

$$(10.8.3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

où $T(x, t)$ désigne la température et où χ désigne la diffusivité thermique, également en $m^2 s^{-1}$. Avec les définitions données sur la figure **10.10 (b)** la solution de la température adimensionnelle est :

$$(10.8.4) \quad \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = f\left(\frac{x}{\sqrt{\chi t}}\right)$$

Remarques -

- L'échelle de température $\delta T = T_0 - T_1$ est supposée petite, de sorte que l'on puisse négliger la variation de la masse volumique due à la dilatation conformément à l'hypothèse du fluide incompressible.
- Rappelons que la diffusivité thermique est liée à la conductivité thermique K (en $W.m^{-1}.K^{-1}$), à la chaleur spécifique du fluide incompressible c (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$) et à la masse volumique ρ (en $kg.m^{-3}$) par la formule : $\chi = K/\rho c$, cf. **(8.2.21)**.

Les deux problèmes ainsi simplifiés aboutissent donc à des solutions autosemblables analogues à **(10.7.16)**. L'examen de ces solutions souligne alors de nouveau le caractère lent de la diffusion. Les valeurs des diffusivités mises en jeu sont les suivantes :

- ✓ diffusivité moléculaire du glucose dans l'eau : $D \approx 10^{-6} m^2 s^{-1}$;
- ✓ diffusivité thermique de l'air (à 0°) : $\chi = 1.86 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-1}$.

Le temps caractéristique de la diffusion du sucre dans un verre de café de hauteur $h = 10cm$, cf. figure **10.10 (a)**, vaut donc :

$$(10.8.5) \quad \tau_D(h) \sim h^2/D \approx 10^{-2}/10^{-6} = 10^4 s \approx 3h (!)$$

Pour celui de la propagation de la chaleur vers le personnage situé à une distance $L = 1m$ du mur chauffant, cf. figure **10.10 (b)**, on trouve :

$$(10.8.6) \quad \tau_\chi(L) \sim L^2/\chi \approx 1/10^{-5} = 10^5 s \approx 27h (!)$$

Ainsi, si l'on veut consommer rapidement du café sucré, le brassage du sucre par un système apte à accélérer le mélange s'impose.

Quant au problème du chauffage, l'observation montre que le fluide chauffé sur l'une des faces verticales d'une pièce, ou bien par le sol, se met naturellement en mouvement sous l'effet de toute variation locale du champ de température. Ce mouvement macroscopique du fluide est appelé **convection naturelle**. Il se déclenche sous l'effet de la gravité dès lors que le fluide chauffé voit sa masse volumique changer localement par dilatation thermique, et cela même si ces variations sont faibles. La source de ce mouvement est la force de flottaison qui tend à élever les parties les plus chaudes du fluide. Cela provoque un écoulement généralement désordonné et turbulent qui favorise le mélange macroscopique de la température dans la pièce. Ce mécanisme instationnaire de la convection naturelle réduit alors de façon spectaculaire le temps caractéristique de l'homogénéisation de la température dans une pièce chauffée par un convecteur mural ou par le sol.

Remarque -

La convection naturelle peut être décrite par une variante du modèle des écoulements de fluide incompressible, donc vérifiant $\text{div } \underline{u} = 0$ (cf. (8.3.1)), mais dans lequel la loi de la dynamique retient l'effet de la gravité sur de petites variations de la masse volumique du fluide. Ce modèle, appelé **approximation de Boussinesq**, constitue un cadre théorique intermédiaire entre le modèle de fluide incompressible homogène non pesant et les équations générales de Navier-Stokes compressibles. Il ne sera pas détaillé ici.

ANNEXE

A10.1 Le théorème de Vaschy-Bukingham : démonstration

Soit une relation dimensionnelle entre N grandeurs physiques, cf. (10.3.2) :

$$(A10.1.1) \quad \mathcal{F}(\underbrace{D_1, D_2, \dots, D_N}_{\substack{N \text{ grandeurs} \\ \text{physiques}}}) = 0$$

Si, cf. (10.4.5) :

$$(A10.1.2) \quad [D_k] = L^{\alpha_k} M^{\beta_k} T^{\gamma_k} \theta^{\delta_k}, \quad k = 1, N$$

on peut construire la **matrice des exposants aux dimensions** de D_1, \dots, D_k sous la forme, cf. (10.4.8) :

$$(A10.1.3) \quad \begin{matrix} & D_1 & D_2 & \dots & D_N \\ M & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ L & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_N \\ T & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_N \\ \theta & \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_N \end{matrix}$$

Le calcul du rang de cette matrice permet de déterminer le nombre de grandeurs de dimensions indépendantes. Soit r le rang de cette matrice. Si l'on suppose que ce sont les r premières grandeurs qui ont des dimensions indépendantes, on identifie ce sous-ensemble dans la relation (A10.1.1) :

$$(A10.1.4) \quad \mathcal{F}(\underbrace{D_1, \dots, D_r}_{\substack{r \text{ grandeurs} \\ \text{indépendantes}}} ; D_{r+1}, \dots, D_N) = 0$$

On sait alors que les dimensions des grandeurs physiques restantes s'expriment nécessairement sous la forme de monômes de celles des grandeurs indépendantes. Soit :

$$\begin{aligned}
 \text{(A10.1.5)} \quad [D_{r+1}] &= [D_1]^{a_{r+1,1}} [D_2]^{a_{r+1,2}} \dots [D_r]^{a_{r+1,r}} \\
 &\dots \dots \dots \dots \\
 [D_N] &= [D_1]^{a_{N,1}} [D_2]^{a_{N,2}} \dots [D_r]^{a_{N,r}}
 \end{aligned}$$

Il est donc possible de définir $(N-r)$ paramètres adimensionnels :

$$\text{(A10.1.6)} \quad \Pi_1 = \frac{D_{r+1}}{D_1^{a_{r+1,1}} \dots D_r^{a_{r+1,r}}}, \dots, \Pi_{N-r} = \frac{D_N}{D_1^{a_{N,1}} \dots D_r^{a_{N,r}}}$$

Dans la relation (A10.1.4), on peut alors exprimer les grandeurs D_{r+1}, \dots, D_N en fonction de leurs homologues adimensionnels (A10.1.6) :

$$\text{(A10.1.7)} \quad \mathcal{F}(D_1, \dots, D_r; \Pi_1 D_1^{a_{r+1,1}} \dots D_r^{a_{r+1,r}}, \dots, \Pi_{N-r} D_1^{a_{N,1}} \dots D_r^{a_{N,r}}) = 0$$

Cette expression peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\text{(A10.1.8)} \quad \mathcal{G}(D_1, \dots, D_r; \Pi_1, \dots, \Pi_{N-r}) = 0$$

Cette fonction **doit être invariante dans tout changement de système d'unités appliqué à ses différents arguments.**

Puisque les paramètres Π_1, \dots, Π_{N-r} sont adimensionnels, ils respectent cette condition. Par contre, ceci n'est possible que si la fonction \mathcal{G} ne dépend pas des grandeurs dimensionnelles indépendantes D_1, \dots, D_r . On obtient donc en définitive une relation entre les $(N-r)$ grandeurs adimensionnelles de la forme:

$$\text{(A10.1.9)} \quad \bar{\mathcal{G}}(\Pi_1, \dots, \Pi_{N-r}) = 0$$

D'où le **théorème de Vaschy-Buckingham** énoncé au paragraphe 10.4.

Chapitre 11

Le fluide parfait : le premier théorème de Bernoulli



Chapitre 11.	Le premier théorème de Bernoulli	410
11.1	Le fluide parfait : avant-propos	410
11.2	Le premier théorème de Bernoulli	411
	Rappels	411
	Enoncé	411
	Le cas d'un repère tournant	413
	Le cas des écoulements de fluide incompressible	414
	Pression d'arrêt	415
11.3	Approfondissement ** - Le cas des écoulements compressibles de gaz	416
	La température d'arrêt d'un gaz	416
	La pression d'arrêt et la masse volumique d'arrêt d'un gaz	418
	La limite incompressible	419
11.4	Application à la mesure	419
	La vitesse	419
	La mesure de la pression d'arrêt : le tube de Pitot	420
	Approfondissement * - La mesure de la vitesse avec un tube de Pitot	421
	La sonde (ou antenne) de Prandtl	422
	Approfondissement ** - La mesure dans les écoulements compressibles de gaz	424
11.5	Le théorème de la pression	425
	L'équilibre cyclostrophique et le théorème de la pression	425
	Exemple : la portance d'une aile	428
11.6	Résumé des formules essentielles	430
A11.1	Les équations du mouvement en repère tournant	A11.1
	Lois de composition des vitesses et des accélérations	A11.1
	Application aux équations du mouvement	A11.2
	La charge totale dans un écoulement tournant	A11.4
A11.2	Le premier théorème de Bernoulli en repère tournant - Exemple d'application : les pompes et les turbines centrifuges	A11.5

Chapitre 11. Le premier théorème de Bernoulli

11.1 Le fluide parfait : avant-propos

Comme nous l'avons montré au **chapitre 8**, dans la limite des très grands nombres de Reynolds les effets visqueux sont concentrés dans des régions de très faible épaisseur (les couches limites), de sorte que l'hypothèse du fluide parfait peut constituer une bonne approximation du problème réel dans une grande portion d'un écoulement. Nous allons donc y consacrer ce chapitre ainsi que les deux suivants.

Dans le présent chapitre, nous allons nous concentrer sur un théorème classique qui caractérise les propriétés du fluide parfait : le **premier théorème de Bernoulli**. Ce théorème introduit des grandeurs nouvelles, notamment la pression d'arrêt et la température d'arrêt, qui caractérisent les propriétés thermodynamiques du fluide lorsqu'on arrête ce dernier de manière isentropique (la notion de température d'arrêt est présentée dans un approfondissement). Ces quantités sont mesurées de manière routinière en mécanique des fluides, car une fois combinées avec la mesure de la pression statique elles permettent dans certaines conditions de connaître le module de la vitesse du fluide. Nous expliquerons cela. Ce faisant nous expliquerons comment varie la pression statique dans un écoulement et comment on la mesure.

Dans le chapitre suivant, le **chapitre 12**, nous nous pencherons sur le rôle de la **vorticité** dans la dynamique d'un milieu continu. Il s'agit là d'une spécificité de la mécanique des fluides. Cela nous permettra alors de distinguer **deux sous-classes** d'écoulements de fluide parfait : les **écoulements rotationnels de fluide parfait** et les **écoulements irrotationnels de fluide parfait**.

Nous montrerons ensuite dans le **chapitre 13** comment le modèle des écoulements irrotationnels de fluide parfait, appelé aussi modèle des **écoulements potentiels**, simplifie l'analyse théorique des régions de fluide parfait d'un écoulement et comment elle ouvre la voie à des méthodes de résolution simples qui ont été longtemps les seules disponibles pour développer les applications de la mécanique des fluides. Ce chapitre sera introduit par l'exposé du **second théorème de Bernoulli** qui a trait aux écoulements de fluide parfait irrotationnels.

11.2 Le premier théorème de Bernoulli

➤ Rappels

Pour débiter, rappelons les notions enseignées jusqu'ici sur l'approximation du fluide parfait :

- ✓ Un écoulement de fluide parfait vérifie $r = 0$, $\underline{q} = 0$, $\underline{\tau} = 0$, cf. (8.4.3) où r désigne la production (ou la perte) volumique de chaleur par rayonnement, \underline{q} , le flux de chaleur, et $\underline{\tau}$, le tenseur des contraintes visqueuses.
- ✓ L'approximation du fluide parfait n'est admissible que dans la mesure où **le nombre de Reynolds** caractéristique de l'écoulement est **grand**, cf. (8.4.6).
- ✓ Les équations du fluide parfait sont les **équations d'Euler** (8.4.10) auxquelles il faut adjoindre les conditions aux limites (8.4.13) - (8.4.16).
- ✓ Puisque l'hypothèse du fluide parfait consiste à supprimer toutes sources d'entropie, de nature réversible et irréversible, les écoulements de fluide parfait sont à la fois **isentropiques**, tels que $ds/dt = 0$, cf. (8.4.4), et **adiabatiques**, c'est-à-dire que chaque particule de fluide se comporte comme un système isolé. S'ils sont permanents, ils sont alors **isoénergétiques**, tels que $dH/dt = 0$, cf. (8.4.5).

➤ Enoncé

Un premier théorème important est attaché à cette notion de fluide parfait. C'est le **premier théorème de Bernoulli**. Il découle directement de la dernière propriété rappelée ci-dessus, celle qui traduit le caractère **isoénergétique** des écoulements permanents de fluide parfait. Rappelons de nouveau le raisonnement qui aboutit à cette propriété. Si l'on considère la somme de toutes les formes d'énergie massique qui constitue **la charge totale**, cf. (5.5.4) :

$$(11.2.1) \quad H = e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \phi ,$$

son équation s'écrit, cf. (5.5.17) :

$$(11.2.2) \quad \rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{dQ_e}{dt}.$$

Le dernier terme, qui vaut, cf. (5.5.18) :

$$(11.2.3) \quad \frac{dQ_e}{dt} = r - \operatorname{div} \underline{q} + \operatorname{div} ({}^t \underline{\tau} \cdot \underline{u}),$$

représente la puissance échangée due à production volumique de chaleur, à la conduction de la chaleur et au frottement. Puisque dans un écoulement de fluide parfait $r = 0$, $\underline{q} = 0$, $\underline{\tau} = 0$, ces trois mécanismes sont absents. L'écoulement est donc **adiabatique**,:

$$(11.2.4) \quad \frac{dQ_e}{dt} = 0$$

Le **premier théorème de Bernoulli** concerne alors le cas des **écoulements stationnaires** (ou **permanents**), pour lesquels les deux termes restants au second membre de l'équation (11.2.2) s'annulent également. Cette hypothèse élimine aussi la dérivée temporelle dans la dérivée matérielle du premier membre de cette équation. Il reste alors :

$$(11.2.5) \quad \boxed{\underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} H = 0}$$

Cette équation caractérise les **écoulements isoénergétiques stationnaires**, cf. (5.5.20). D'où le théorème suivant énoncé par Bernoulli en 1738 :

Premier théorème de Bernoulli -

Un écoulement **stationnaire** de **fluide parfait** est **isoénergétique**, c'est-à-dire qu'il conserve la **charge totale** du fluide le long de ses lignes de courant :

$$(11.2.6) \quad H = e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \phi = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

La constante H est appelée parfois **constante de Bernoulli** par référence à ce théorème.

Ainsi, d'après ce théorème, en l'absence de viscosité et de conduction, donc quand l'écoulement se ramène à celui d'un fluide parfait, et si de plus l'écoulement est stationnaire, la somme de toutes les formes d'énergie spécifiques attachées à une particule de fluide (énergie interne e , énergie cinétique $\frac{\underline{u}^2}{2}$, énergie potentielle de pression p/ρ et énergie potentielle due à la force extérieure ϕ) se conserve sur chaque ligne de courant. A somme égale, chacune de ses formes d'énergie peut changer le long des lignes de courant. Ces transvasements d'une forme d'énergie vers l'autre s'effectuent alors de manière **réversible** puisque les écoulements de fluide parfait sont **isentropiques**. Un exemple simple correspond à l'échange entre p/ρ et $\frac{\underline{u}^2}{2}$ qui caractérise le ralentissement ou l'accélération d'un écoulement de fluide incompressible.

➤ Le cas d'un repère tournant

De nombreuses applications de la mécanique des fluides mettent en jeu des repères tournants (rotation de la terre, rotation d'hélices, de roues de compresseurs ou de turbines, etc.). Il est alors recommandé d'analyser ces écoulements dans le repère attaché à la rotation de l'objet étudié. La mécanique du point nous enseigne que dès lors que l'on raisonne dans un repère tournant caractérisé par un vecteur rotation $\underline{\Omega}_0$ constant, cela introduit dans l'équation de la dynamique une accélération inertielle, l'accélération de Coriolis $2\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{u}$ perpendiculaire à \underline{u} , ainsi qu'une force de volume, la force centrifuge $-\underline{grad} \left[\frac{1}{2}(\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2 \right]$. A toutes fins utiles, nous rappelons dans l'annexe **A11.1** comment l'on obtient ces termes.

Si on considère un écoulement de fluide parfait dans un repère tournant de vecteur rotation constant $\underline{\Omega}_0$, la constante de Bernoulli H (la charge totale) s'enrichit alors du **potentiel centrifuge** $-\frac{1}{2}(\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2$. L'équation (11.2.6) qui traduit le premier théorème de Bernoulli devient dans ce cas :

$$(11.2.7) \quad H = e + \frac{p}{\rho} + \frac{\underline{u}^2}{2} - \frac{1}{2}(\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2 + \phi = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

où ϕ désigne le potentiel des forces de volume conservatives.

Remarque -

Notons que la force centrifuge peut aussi être considérée comme une force de volume conservative puisqu'elle dérive d'un potentiel.

Dans cette équation, \underline{u} désigne maintenant la vitesse relative du fluide dans le repère tournant. Une bonne illustration de l'intérêt de cette formule est son application au cas des pompes et des turbines centrifuges dont nous expliquons le principe dans l'annexe **A11.2**.

➤ Le cas des écoulements de fluide incompressible

Si on se limite au cas d'un repère galiléen, l'équation de l'énergie interne sous sa forme générale (5.4.7) :

$$(11.2.8) \quad \begin{cases} \rho \frac{de}{dt} = r - \operatorname{div} \underline{q} - p \operatorname{div} \underline{u} + \epsilon \\ \epsilon = {}^t \underline{\tau} : \nabla \underline{u} \quad - \text{fonction de dissipation visqueuse} \end{cases}$$

montre que dans **un écoulement de fluide parfait**, où $r = \underline{q} = \underline{\tau} = 0$, l'énergie interne se conserve de manière autonome le long de toute trajectoire fluide dans la mesure où le fluide peut être considéré comme **incompressible** (tel que $\operatorname{div} \underline{u} = 0$). Dans ce cas la masse volumique ρ se conserve le long des lignes de courant (continuité). Une fois cela pris en compte, l'élimination de l'énergie interne de la charge totale H réduit cette dernière à l'énergie mécanique spécifique $e^{mec} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \phi$, cf. (5.5.3). Si l'écoulement est **stationnaire**, le premier théorème de Bernoulli sous sa forme incompressible se réduit donc à la **conservation de l'énergie mécanique** spécifique le long de chaque ligne de courant :

$$(11.2.9) \quad e^{mec} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \phi = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

On obtient alors la version suivante du premier théorème de Bernoulli :

Premier théorème de Bernoulli : cas du fluide incompressible -

Un écoulement **stationnaire** de **fluide parfait incompressible** vérifie :

$$(11.2.10) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \phi = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

Si l'on peut de plus **négliger les forces de volume**, ou si l'écoulement s'effectue parallèlement aux lignes équipotentiellles $\phi = \text{const.}$ (par exemple horizontalement dans le cas d'un écoulement pesant), on obtient :

$$(11.2.11) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

➤ Pression d'arrêt

La relation (11.2.11), qui est de la forme « $p + \frac{1}{2} \rho \underline{u}^2 = \text{const.}$ », est probablement la plus connue de la mécanique des fluides. C'est l'expression du **premier théorème de Bernoulli** qui stipule que dans les écoulements stationnaires de fluide parfait incompressible sans force de volume la somme de la pression statique p et de l'énergie cinétique volumique $\frac{1}{2} \rho \underline{u}^2$ reste constante le long des lignes de courant. Dans cette relation, la quantité $\frac{1}{2} \rho \underline{u}^2$ est aussi assimilée à une pression appelée **pression dynamique**. En effet, si \underline{u} et p désignent la vitesse et la pression locales du fluide en un point donné de l'écoulement, si l'on arrête en ce point le fluide de manière isentropique (donc sans frottement, c.-à-d. de manière compatible avec l'hypothèse du fluide parfait), la pression obtenue est égale à la pression p augmentée de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} \rho \underline{u}^2$. Cette « pression totale » définit la **pression d'arrêt** (*stagnation pressure*) que l'on note p_t :

$$(11.2.12) \quad p_t = p + \frac{1}{2} \rho \underline{u}^2 \quad - \text{ pression d'arrêt}$$

Conformément au premier théorème de Bernoulli (11.2.10), pour un **écoulement stationnaire de fluide parfait incompressible** cette quantité vérifie :

$$(11.2.13) \quad p_t + \rho \phi = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

Si on peut négliger les forces de volume, ou si l'écoulement s'effectue parallèlement aux lignes équipotentiellles $\phi = \text{const.}$ (par exemple horizontalement dans le cas d'un écoulement pesant), la pression d'arrêt vérifie :

$$(11.2.14) \quad p_t = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

Remarques -

- Comme illustré sur la figure **11.1** ci-dessous la pression d'arrêt p_t est celle que l'on ressent face au vent. Cette pression est égale à la pression statique p du vent augmentée de l'énergie cinétique de ce vent quand on l'arrête sur la face avant de notre corps. Cette somme est la pression d'arrêt. Elle est égale à la pression atmosphérique.
- Le vent nous contourne et se crée alors une zone d'« eau morte » derrière nous, comme dans l'écoulement en interaction avec un cylindre fixe illustré sur la figure **8.6 (b)** du **chapitre 8**. La pression de cette région d'« eau morte » est de l'ordre de la pression statique p du vent (en fait elle est inférieure à p comme nous l'expliquerons au **chapitre 13**)
- Il se crée alors un différentiel de pression entre la face avant et la face arrière de notre corps qui tend à nous pousser vers l'arrière. Ce différentiel de pression est de l'ordre de la pression dynamique $\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2$.



Figure 11.1 - Effet de la pression d'arrêt p_t ressentie face à un vent violent.

- A contrario, étant donnée une pression d'arrêt p_t , conformément à **(11.2.12)** toute accélération du fluide s'accompagne d'une dépressurisation. C'est ce phénomène qui explique par exemple l'arrachement d'une toiture par une forte rafale de vent, ou encore l'éparpillement d'un tas de feuilles mortes rassemblées sur le sol.
- Comme introduit au paragraphe **6.5** du **chapitre 6**, la force $\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2S$ égale au produit de la pression dynamique $\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2$ par une surface de référence est la quantité qui est utilisée par les aérodynamiciens pour normaliser les efforts aérodynamiques et obtenir les coefficients sans dimensions de traînée et de portance C_D et C_L définis en **(6.5.4)**.

11.3 Approfondissement ** - Le cas des écoulements compressibles de gaz

On considère ici le cas des **écoulements compressibles de gaz**.

➤ La température d'arrêt d'un gaz

Plaçons-nous dans le cas de l'écoulement **stationnaire** d'un **fluide parfait**, **sans force de volume**. L'élimination du potentiel ϕ des forces de volume réduit la charge totale H à l'**enthalpie totale** h_t , cf. **(5.5.2)**. Le **premier théorème de Bernoulli** **(11.2.6)** devient :

$$(11.3.1) \quad h_t = \underbrace{e + \frac{p}{\rho}}_h + \frac{1}{2} \underline{u}^2 = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

où h désigne l'enthalpie. Rajoutons l'hypothèse que le fluide est un **gaz thermiquement et calorifiquement parfait**. Alors, cf. (A1.2.30) :

$$(11.3.2) \quad \begin{cases} e = c_V T \\ h = e + \frac{p}{\rho} = c_p T \end{cases}$$

Imaginons alors, comme schématisé sur la figure 11.2 ci-dessous, que l'on arrête cet écoulement en un point. Si l'on note T_{st} la température du fluide relevée en ce point où $\underline{u} = 0$ (point d'arrêt), d'après le premier théorème de Bernoulli on peut écrire :

$$(11.3.3) \quad h_t = c_p T + \frac{1}{2} \underline{u}^2 = c_p T_t,$$

où T et \underline{u} désignent la température et la vitesse en n'importe quel point de la ligne de courant aboutissant au point d'arrêt, et où T_t définit la **température d'arrêt** (*stagnation temperature*).

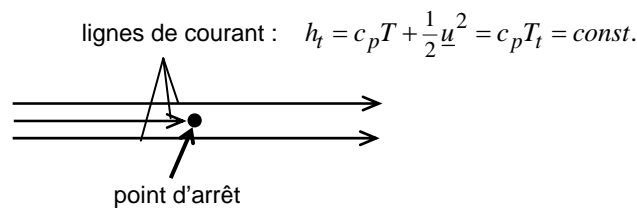


Figure 11.2 - Point d'arrêt dans l'écoulement permanent d'un fluide parfait constitué par un gaz thermiquement et calorifiquement parfait : notion de température d'arrêt.

Remarque -

Il convient de rappeler ici que le processus d'arrêt doit s'effectuer de manière isentropique pour que l'hypothèse du fluide parfait reste valable le long de toute la ligne de courant considérée. On peut montrer que cela exclut les cas où le nombre de Mach de l'écoulement que l'on arrête est supérieur à la valeur critique $M = 1$ (écoulement en régime supersonique) car dans ce cas il se développe une onde de choc devant la sonde, donc à l'amont du point d'arrêt, et l'écoulement n'est plus isentropique à la traversée de cette discontinuité. L'écoulement est alors isentropique par morceau, c.-à-d. de l'infini amont jusqu'à la surface de choc, puis de cette surface jusqu'au point d'arrêt de la sonde. Pour déterminer les conditions amont, il faut alors tenir compte de la présence du choc qui se traduit par une diminution de la pression d'arrêt. Cette perte de pression d'arrêt traduit la concentration d'effets visqueux dans la surface de choc, effets qui réduisent l'énergie mécanique au bénéfice de l'énergie interne (le gaz ralentit, se densifie et s'échauffe brutalement à la traversée du choc). La température d'arrêt reste quant à elle inchangée car elle effectue la somme de l'énergie mécanique (qui décroît) et de l'énergie interne (qui augmente). Ces phénomènes de saut des quantités thermodynamiques à la traversée d'une onde de choc sont alors pris en compte au moyen de relations issues de la théorie des ondes de choc, relations appelées relations de saut de Rankine-Hugoniot. On étudie ces relations dans le cours d'aérodynamique compressible en troisième année.

La température d'arrêt T_t résulte de la **transformation de l'énergie cinétique en enthalpie** (donc en température pour un gaz parfait) lors du processus isentropique d'arrêt du fluide parfait. On peut alors introduire la notion de **température cinétique**, telle que :

$$(11.3.4) \quad T_{\text{cinétique}} = \frac{1}{2} \frac{u^2}{c_p}$$

Soit pour la température d'arrêt :

$$(11.3.5) \quad T_t = T + T_{\text{cinétique}}$$

Si l'on exprime la température cinétique (11.3.4) en fonction du nombre de Mach local $M = \|u\|/c$ où $c = \sqrt{\gamma r T}$ est la vitesse du son locale, cf. (A1.2.33), avec $\gamma = c_p/c_v$ le coefficient adiabatique, cf. (A1.1.24), et r la constante molaire des gaz parfait, cf. (A1.2.11), on obtient :

$$(11.3.6) \quad T_{\text{cinétique}} = \frac{1}{2} \frac{u^2}{c_p} = \frac{1}{2} \frac{\gamma r}{c_p} M^2 T = \frac{1}{2} (\gamma - 1) M^2 T$$

Pour la dernière identité, on a fait appel à la relation de Mayer $r = c_p - c_v$, cf. (A1.2.34). En combinant (11.3.5) et (11.3.6) on obtient pour la température d'arrêt en fonction du nombre de Mach :

$$(11.3.7) \quad T_t = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Cette relation caractérise la variation de la température locale d'un gaz en fonction du nombre de Mach dans le cadre de l'hypothèse du fluide parfait.

➤ La pression d'arrêt et la masse volumique d'arrêt d'un gaz

On peut introduire de la même façon deux autres grandeurs thermodynamiques qui caractérisent les conditions d'arrêt d'un gaz : la **pression d'arrêt** p_t , déjà introduite plus haut, et la **masse volumique d'arrêt** ρ_t . La loi d'état thermique d'un gaz parfait, cf. (A1.2.11), nous permet de relier ces grandeurs et la température d'arrêt au moyen de la relation :

$$(11.3.8) \quad \frac{p_t}{p} = \frac{\rho_t T_t}{\rho T}$$

Dans la mesure où l'écoulement est partout isentropique, d'après (A1.2.45) on peut écrire sur toute ligne de courant aboutissant à un point d'arrêt :

$$(11.3.9) \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_t}{\rho_t^\gamma} = \text{const.}$$

En combinant (11.3.8) et (11.3.9), on obtient la relation isentropique :

$$(11.3.10) \quad \frac{p_t}{p} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Compte tenu de (11.3.7), on en déduit que :

$$(11.3.11) \quad p_t = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Enfin, pour la masse volumique, compte tenu de (11.3.9), on obtient :

$$(11.3.12) \quad \rho_t = \rho \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Les relations (11.3.7), (11.3.11) et (11.3.12), sont appelées **relations isentropiques**. Rappelons qu'elles sont valables pour un **écoulement stationnaire de fluide parfait sans force de volume**, et si le fluide est **un gaz thermiquement et calorifiquement parfait**.

➤ La limite incompressible

Les variations de la masse volumique que l'on déduit d'un développement limité de (11.3.12) vérifient :

$$(11.3.13) \quad \frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\rho_{st} - \rho}{\rho} = \frac{1}{2} M^2 + O(M^4)$$

On retrouve bien ainsi le critère de validité des écoulements de fluide incompressible $M^2 \ll 1$ établi au **chapitre 8**, cf. (8.3.5).

11.4 Application à la mesure

➤ La vitesse

Si l'on connaît la pression d'arrêt p_t et la pression statique p dans un écoulement de fluide parfait incompressible, et si l'on peut négliger les force de volume ou si l'écoulement

s'effectue le long des équipotentielles $\phi = \text{const.}$ (par exemple horizontalement dans le cas d'un écoulement pesant), compte tenu de la définition de la pression d'arrêt (11.2.12), le théorème de Bernoulli sous la forme (11.2.13) permet de déterminer la vitesse au moyen de la formule :

$$(11.4.1) \quad \|u\| = \sqrt{\frac{2(p_t - p)}{\rho}}$$

Nous présentons ici deux techniques bien connues qui permettent de mesurer les deux types de pression mis en jeu dans cette relation. L'examen de ces méthodes permet de bien réfléchir à la nature physique de ces deux grandeurs.

➤ La mesure de la pression d'arrêt : le tube de Pitot

On peut déterminer la **pression d'arrêt** p_t au moyen d'un **tube de Pitot**. Comme schématisé sur la figure 11.3 ci-dessous le tube de Pitot est constitué par un simple tube aligné le long d'une ligne de courant de l'écoulement. Si le tube est relié à la membrane d'un capteur de pression, le fluide à l'intérieur du tube est stoppé par la membrane de ce capteur. La colonne de fluide qui occupe le tube est donc au repos. En régime stationnaire (c.-à-d. une fois que tous les processus dynamiques et thermiques sont à l'équilibre dans le tube), elle transmet donc la contrainte totale que le fluide exerce sur la section d'entrée du tube de Pitot. Cette contrainte est la **pression d'arrêt** p_t . Si l'écoulement est un écoulement stationnaire de fluide parfait incompressible sans force de volume (ou qui s'effectue parallèlement aux lignes équipotentielles $\phi = \text{const.}$), conformément à (11.2.14) cette pression d'arrêt caractérise l'ensemble de la ligne de courant considérée.



Figure 11.3 – Le tube de Pitot : principe général.

Le tube de Pitot fournit donc la pression d'arrêt p_t . Cela ne suffit pas en général pour déterminer le module de la vitesse d'un écoulement. En effet, conformément à (11.4.1), il est nécessaire pour cela de connaître aussi la pression statique. Toutefois, il s'avère que dans les applications qui ont motivé cette invention, à savoir la détermination de la vitesse des rivières et celle du déplacement des navires, un tel outil suffit. Cela est expliqué dans l'approfondissement du § 11.3 ci-dessus.

➤ Approfondissement * - La mesure de la vitesse avec un tube de Pitot

Comme expliqué dans son exposé « Sur une nouvelle machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes » publié par l'Académie royale des sciences en 1732, l'objectif premier d'Henri Pitot était de mesurer la vitesse des rivières. Comment a-t-il procédé ?

Dans le cas d'un écoulement incompressible pesant à surface libre, tel qu'une rivière, la pression n'est plus une inconnue : c'est la pression hydrostatique évaluée à partir de la pression atmosphérique p_a qui règne au-dessus de la surface libre en mouvement. La figure 11.4 décrit le principe original proposé par Pitot.

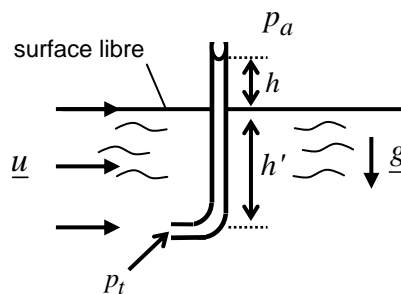


Figure 11.4 - Le tube de Pitot : le principe original proposé par Pitot pour les écoulements à surface libre.

En considérant l'origine des hauteurs au niveau de la surface libre et en appliquant le **premier théorème de Bernoulli** sous sa forme (11.2.13) le long d'une ligne de courant horizontale de profondeur constante $z = -h'$ où $\underline{u} = u \underline{e}_x$, on obtient :

$$\underline{u} = u \underline{e}_x$$

$$(11.4.2) \quad p_t = p(-h') + \frac{1}{2} \rho u^2 = \text{const.}, \text{ le long de la surface de courant } z = -h'$$

Dans le liquide en mouvement, tenant compte de la conservation de la pression à la traversée de l'interface, la pression à la profondeur $z = -h'$ est donnée par l'**équilibre hydrostatique**, cf. (4.5.12) :

$$(11.4.3) \quad p(-h') = p_a + \rho g h'$$

Remarque -

La **condition dynamique** qui prévaut à l'interface entre deux fluides non miscibles en l'absence d'effet de viscosité et de tension superficielle est la continuité de la pression, cf. (8.4.16). Soit ici $p(z = 0^+) = p_a = p(z = 0^-)$ où $p(z = 0^+)$ et $p(z = 0^-)$ désignent la pression du fluide en mouvement situé juste au-dessus et au-dessous sous la surface libre.

D'où :

$$(11.4.4) \quad p_t = p_a + \rho g h' + \frac{1}{2} \rho u^2 = \text{const.}, \text{ le long de la surface de courant } z = -h'$$

Par ailleurs, l'équilibre hydrostatique de la colonne de fluide qui est au repos dans le tube donne :

$$(11.4.5) \quad p_t = p_a + \rho g (h' + h)$$

De ces deux dernières relations on déduit :

$$(11.4.6) \quad u = \sqrt{2gh}$$

Dans cette application, le tube de Pitot devient donc bien un vélocimètre.

Remarque -

Ce système s'avère peu pratique à cause des imprécisions liées au mouvement de la surface et aux faibles hauteurs de la colonne de liquide que l'on obtient pour des vitesses typiques d'écoulements à surface libre. A titre d'exemple, on obtient $h \approx 5\text{cm}$ pour $u = 1\text{m.s}^{-1}$, et $h \approx 0.5\text{mm}$ pour $u = 10\text{cm.s}^{-1}$. Ce principe a été amélioré de maintes manières que nous n'allons pas décrire ici.

➤ **La sonde (ou antenne) de Prandtl**

Conformément à (11.4.1), pour obtenir le module de la vitesse dans un écoulement de fluide parfait incompressible où l'on peut négliger les force de volume (ou si l'écoulement s'effectue parallèlement aux lignes équipotentiellles), une mesure simultanée de la pression d'arrêt et de la pression statique est nécessaire. C'est ce que l'on peut réaliser avec une **sonde** (ou **antenne**) de **Prandtl**. Une telle sonde est représentée sur la figure 11.5. Elle est constituée d'un corps fuselé que l'on aligne avec les lignes de courant locales. La partie centrale du tube constitue un tube de Pitot. La pression statique p est prélevée quant à elle à l'aide d'un trou réalisé sur la paroi latérale du tube. Si le corps de la sonde est suffisamment fin, la ligne de courant qui impacte le point d'arrêt et celle qui se trouve au-dessus du trou latéral ont des propriétés identiques. On mesure donc sur la paroi latérale la pression statique associée à la pression totale du point d'arrêt. Les deux canaux de mesure sont reliés à un capteur de pression différentiel à partir duquel on détermine la différence $(p_{st} - p)$. D'où la vitesse via la relation (11.4.1).

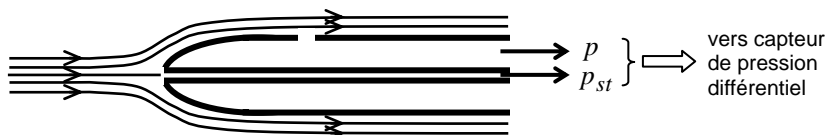


Figure 11.5 - La sonde, ou antenne, de Prandtl : principe

On notera bien toutefois qu'il s'agit là d'un raisonnement de fluide parfait. Comme évoqué au **chapitre 8**, l'adhérence du fluide sur la paroi externe de la sonde induit le développement d'une couche limite où le fluide est dominé par les effets de la viscosité. Lorsque nous détaillerons au **chapitre 15** les équations de la couche limite, nous démontrerons alors que les variations de la pression à travers la couche limite dans une direction normale à la paroi sont négligeables. C'est donc bien la pression statique de l'écoulement de fluide parfait qui se trouve au-dessus de la couche limite de la sonde que l'on mesure avec le trou latéral.

Par contre, l'écoulement que l'on arrête avec le tube de Pitot de l'antenne de Prandtl doit être un écoulement de fluide parfait. Comme illustré sur l'exemple de la figure **11. 6** ci-dessous, si le tube de Pitot est monté sur une paroi, il faut le placer au-dessus de la région visqueuse qui caractérise la couche limite de cette paroi (cf. figure **8.3** et **chapitre 15**).



Figure 11. 6 - Tube de Pitot implanté sur le fuselage d'un avion (Airbus A380). L'écoulement va de la droite vers la gauche. La hauteur du tube de Pitot par rapport à la paroi du fuselage de l'avion tient compte de l'estimation de l'épaisseur de la région dominée par les effets de la viscosité, ç-à-d. de la couche limite du fuselage. La sonde fonctionne alors bien dans un écoulement de fluide parfait.

Remarques -

- La sonde présentée ci-dessus n'est pas une antenne de Prandtl : la pression statique est mesurée ailleurs sur la paroi du fuselage de l'avion.
- L'aillette arrière (en noir) est une girouette qui permet d'évaluer l'incidence de l'écoulement par rapport au tube de Pitot, qui lui reste fixe.
- Une sonde de température est logée à l'intérieur du tube de Pitot. Elle complète l'ensemble des trois mesures, pression d'arrêt, pression statique et température d'arrêt, qui sont nécessaires pour déterminer la vitesse lorsque le nombre de Mach n'est pas négligeable. Cela est expliqué dans l'approfondissement ci-dessous

➤ **Approfondissement ** - La mesure dans les écoulements compressibles de gaz**

Nous revenons ici sur le cas des **écoulements compressibles de gaz** étudié dans l'approfondissement du paragraphe 11.3.

Dans le cadre des hypothèses du fluide parfait, nous avons vu que la détermination des propriétés d'un **écoulement de gaz** en régime **compressible** (tel que $M^2 \ll 1$) repose sur la détermination de trois quantités : la pression d'arrêt p_t , la pression statique p et la température d'arrêt T_t . Elle

s'appuie alors sur l'utilisation des deux relations isentropiques (11.3.11) et (11.3.7) que nous réécrivons ici :

$$(11.4.7) \quad \begin{cases} p_t = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ T_t = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \end{cases}$$

On procède de la manière suivante.

✓ On peut mesurer les pressions p_{st} et p au moyen d'une sonde telle que l'antenne de Prandtl détaillée plus haut dans le corps du texte. On en déduit le nombre de Mach M au moyen de la première relation isentropique ci-dessus.

✓ En introduisant la célérité du son $c = \sqrt{\gamma r T}$, le nombre de Mach vaut $M = \|\underline{u}\| / \sqrt{\gamma r T}$. On peut donc déterminer le module de la vitesse $\|\underline{u}\|$ si on connaît la température statique T . Or on peut déduire T de la seconde relation isentropique ci-dessus moyennant une mesure de la température d'arrêt T_t . On réalise cela au moyen d'une sonde thermométrique (e.g. un thermocouple).

D'où finalement le module de la vitesse $\|\underline{u}\| = M \sqrt{\gamma r T}$.

Remarques -

- Rappelons de nouveau que dans le cas où le nombre de Mach dépasse la valeur critique $M = 1$ (écoulement en régime supersonique), une onde de choc vient se placer devant la ou les sondes. Les variables que l'on mesure sont alors celles obtenues derrière cette onde de choc. Dans ce cas, il faut faire appel à des relations supplémentaires issues de la théorie des ondes de choc (les relations de saut de Rankine-Hugoniot) pour déduire de ces mesures la valeur des différentes variables devant l'onde de choc.

- Dans la pratique, pour mesurer la pression d'arrêt p_t et la pression statique p dans un écoulement compressible, on évite d'utiliser une antenne de Prandtl, cf. figure 11.5, car lorsque le nombre de Mach dépasse la valeur $M = 1$, la formation d'une onde de choc devant la sonde complexifie grandement l'interprétation de la mesure. On préfère alors découpler la mesure des pressions, en mesurant p_t avec un simple tube de Pitot et en mesurant p avec une sonde de pression statique autonome. On dissocie donc les deux principes que combine l'antenne de Prandtl pour obtenir ces deux pressions. On utilise par ailleurs un thermocouple pour connaître la température totale T_t (ce thermocouple peut être intégré dans le tube de Pitot, le cas échéant).

11.5 Le théorème de la pression

Comme nous l'avons vu avec l'exemple de la sonde de Prandtl, la pression statique est une quantité mesurable. Il s'avère alors très instructif de comprendre comment elle varie au sein d'un écoulement de fluide parfait.

➤ L'équilibre cyclostrophique et le théorème de la pression

Le premier théorème de Bernoulli nous enseigne que sur les lignes de courant d'un écoulement stationnaire de fluide parfait les variations de la pression résultent d'un échange avec les trois autres formes de l'énergie : l'énergie interne, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle des forces de volume. Nous allons analyser maintenant comment cette grandeur peut varier **dans les directions perpendiculaires** aux lignes de courant.

Pour cela nous allons projeter les équations sur un système de **coordonnées intrinsèques** attaché aux lignes de courant (repère de Frenet). En se référant à la figure **11.7** ci-dessous, on note s la coordonnée qui identifie la position d'un point sur la ligne de courant. On introduit alors le trièdre orthonormé $(\underline{e}_s, \underline{e}_n, \underline{e}_b)(s)$ attaché à ce point, où \underline{e}_n définit la normale principale locale (ici orientée dans la direction opposée à celle du centre de courbure), et où $\underline{e}_b = \underline{e}_s \wedge \underline{e}_n$ définit la binormale.

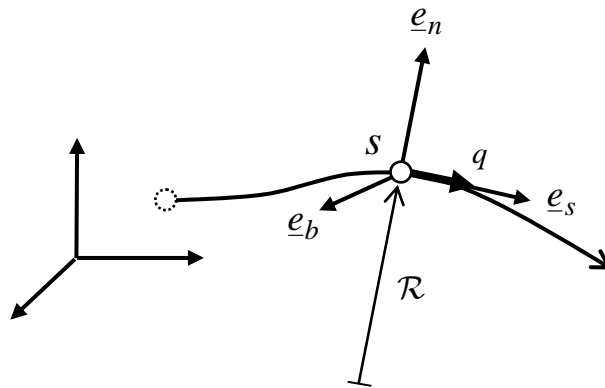


Figure 11.7 - Repère intrinsèque attaché à une ligne de courant (repère de Frenet) : définitions.

Le vecteur tangent \underline{e}_s vérifie :

$$(11.5.1) \quad \frac{\partial \underline{e}_s}{\partial s} = -\frac{\underline{e}_n}{\mathcal{R}}$$

où \mathcal{R} définit le rayon de courbure principal local, et $1/\mathcal{R}$, la courbure locale. La vitesse vaut :

$$(11.5.2) \quad \underline{u} = q \underline{e}_S$$

Le premier théorème de Bernoulli correspond à la projection de l'équation (11.2.5) selon \underline{e}_S :

$$(11.5.3) \quad \frac{\partial H}{\partial s} = 0$$

Pour analyser la variation de la pression dans la direction \underline{e}_n normale aux lignes de courant de l'écoulement il faut revenir à la forme initiale de la loi de la dynamique qui, pour **un fluide parfait**, correspond à la deuxième équation du système des équations d'Euler (8.4.10) que l'on considère ici pour le cas d'un **écoulement stationnaire de force de volume dérivant d'un potentiel** :

$$(11.5.4) \quad \rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \rho \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = -\rho \underline{\text{grad}} \phi - \underline{\text{grad}} p$$

En projetant cette équation selon \underline{e}_n et en la divisant par la masse volumique on obtient :

$$(11.5.5) \quad \frac{d\underline{u}}{dt} \cdot \underline{e}_n = -\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$$

où n désigne l'abscisse curviligne dans la direction de la normale. Compte tenu de (11.5.2), on a :

$$(11.5.6) \quad \frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{d(q\underline{e}_S)}{dt} = \frac{dq}{dt} \underline{e}_S + q \frac{d\underline{e}_S}{dt},$$

L'écoulement étant supposé stationnaire, cela devient :

$$(11.5.7) \quad \frac{d\underline{u}}{dt} = \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = q \frac{\partial q}{\partial s} \underline{e}_S + q^2 \frac{\partial \underline{e}_S}{\partial s}$$

Compte tenu par ailleurs de (11.5.1), on obtient donc :

$$(11.5.8) \quad \frac{d\underline{u}}{dt} = \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = q \frac{\partial q}{\partial s} \underline{e}_S - \underbrace{\frac{q^2}{\mathcal{R}}}_{\text{accélération centripète}} \underline{e}_n$$

Comme indiqué dans cette équation, lorsque la ligne de courant est courbe ($\mathcal{R} \neq \infty$), le dernier terme caractérise une accélération centripète. En retenant cette composante normale de l'accélération dans la relation (11.5.5), cela donne finalement :

$$(11.5.9) \quad \frac{q^2}{\mathcal{R}} = \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$$

Dans le cas où l'on peut négliger les forces de volume, cela devient :

$$(11.5.10) \quad \boxed{\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho q^2}{\mathcal{R}}}$$

C'est le résultat cherché. Cette relation est appelée **équilibre cyclostrophique**. Elle traduit un équilibre entre la force centrifuge $\rho q^2 / \mathcal{R}$ qui tend à éjecter les « particules de fluide » de leur trajectoire courbe et la force de pression $-\partial p / \partial n$ qui les maintient sur cette trajectoire. On peut énoncer à partir de cette relation un théorème, que nous appellerons **théorème de la pression** :

Théorème de la pression -

Dans un écoulement stationnaire de fluide parfait sans force extérieure, la pression décroît vers le centre de courbure local des lignes de courant.

Un **corollaire** de ce théorème, obtenu pour $\mathcal{R} \rightarrow \infty$, est :

Dans un écoulement stationnaire **rectiligne** de fluide parfait sans forces extérieures, la pression statique est uniforme dans la direction perpendiculaire à l'écoulement.

Le théorème ci-dessus est très pratique car il permet de comprendre comment la pression varie d'une trajectoire à l'autre dans un écoulement dont les lignes de courant sont courbes. A titre d'exemple, nous allons montrer que cela permet de comprendre « comment on vole ».

➤ Exemple : la portance d'une aile

L'application la plus classique de ces raisonnements est probablement celle schématisée sur la figure 11.8. Il s'agit de la force de portance engendrée par l'écoulement bidimensionnel contournant un profil d'aile. La forme asymétrique du profil (due ici à sa cambrure et à son angle d'incidence) courbe les lignes de courant, comme figuré. On note p_∞ la pression de l'écoulement que l'on retrouve au-dessus et en dessous de l'aile à une distance suffisante.

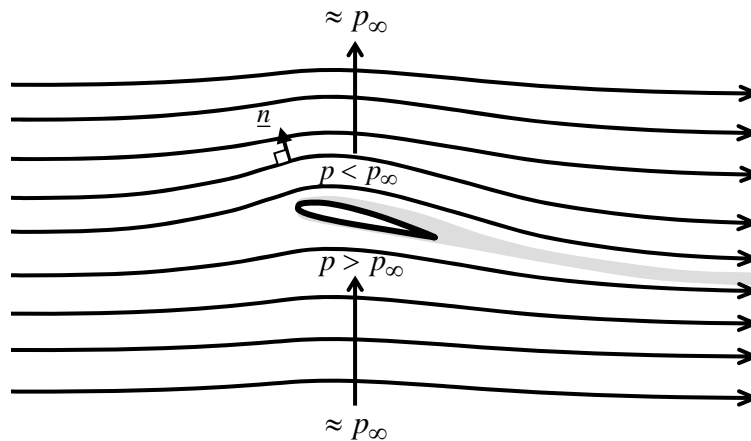


Figure 11.8 - Application du théorème de la pression dans les écoulements de fluide parfait : la portance (Source : J.N. Gence, « Les écoulements de fluide newtonien », Coll.Technosup, Editions Ellipses, 2007)

On raisonne alors de la façon suivante :

✓ Partant de la condition $p \approx p_\infty$ dans la région située **au dessous** l'aile, compte tenu de la forme des lignes de courant dans cette région, la pression p_∞ est celle qui caractérise les centres des courbures. Lorsque qu'on se rapproche de la partie inférieure de l'aile, que l'on appelle **intrados**, on s'éloigne donc de ces centres ; donc la pression est supérieure à p_∞ . L'intrados est donc en surpression.

✓ Partant maintenant de la même condition $p \approx p_\infty$ qui s'applique aussi **au-dessus** de l'aile, quand on se rapproche de la partie supérieure de l'aile, appelée **extrados**, on se déplace cette fois-ci vers les centres de courbures ; la pression que l'on obtient est donc inférieure à p_∞ . L'extrados est donc en dépression.

Au bilan, on voit que c'est en courbant les lignes de courant d'un écoulement initialement rectiligne uniforme que l'on parvient à créer le différentiel de pression qui engendre la sustentation d'un objet. C'est le **principe de la portance**.

C'est comme cela que l'animal de la figure **11.9 (a)** ci-dessous peut contrer la résultante de son poids et de la force centrifuge engendrée par la courbure de sa trajectoire. Notons que la force d'Archimède, négligeable ici, ne peut être d'aucun secours pour sustenter l'animal dans l'air. C'est ce que nous avons souligné dans le **chapitre 4** à propos de la figure **4.6**. La figure **11.9 (b)** rappelle alors qu'un avion ne fait qu'imiter ce principe naturel de la portance.

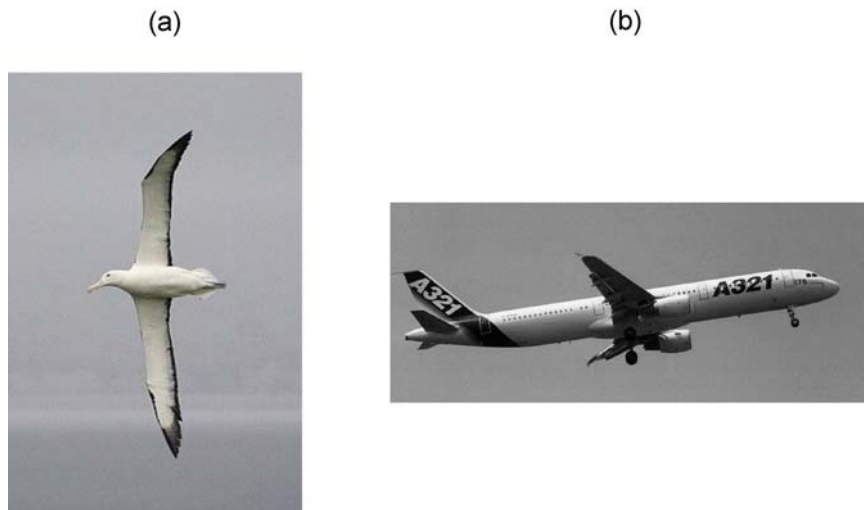


Figure 11.9 - La portance : (a) un albatros, (b) un avion.

11.6 Résumé des formules essentielles

➤ Premier théorème de Bernoulli

✓ Hypothèses

Ecoulement stationnaire de fluide parfait avec force de volume dérivant d'un potentiel

✓ Enoncé, cf. (11.2.5), (11.2.6)

$$(11.6.1) \quad \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} H = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} H = e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \phi = \text{const.} \\ \text{le long des lignes de courant} \end{array} \right.$$

✓ Cas du fluide incompressible sans force de volume, cf. (11.2.12), (11.2.14)

$$(11.6.2) \quad p_t = p + \frac{1}{2} \rho \underline{u}^2 = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

Cette relation est aussi valable si l'écoulement s'effectue parallèlement aux lignes équipotentiels $\phi = \text{const.}$ (par exemple horizontalement dans le cas d'un écoulement pesant). La pression p_t est appelée pression d'arrêt (*stagnation pressure*). C'est celle que l'on mesure lorsque l'on arrête le fluide (principe du tube de Pitot).

➤ Théorème de la pression

✓ Hypothèses

Ecoulement stationnaire de fluide parfait sans force de volume

✓ Enoncé, cf. (11.5.10)

$$(11.6.3) \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{q^2}{\mathcal{R}}$$

où q désigne le module de la vitesse, n la coordonnée selon la normale principale (que nous orientons ici dans la direction opposée à celle du centre de courbure local), et \mathcal{R} le rayon de courbure. Cela signifie que la pression statique décroît vers le centre de courbure local des trajectoires. Cette relation porte aussi le nom d'**équilibre cyclostrophique**.

ANNEXES

A11.1 Les équations du mouvement en repère tournant

Nous allons démontrer ici ce qu'il advient des équations du mouvement dans un repère mobile en rotation de corps solide. Nous nous limitons à l'examen de cas d'un **écoulement de fluide newtonien incompressible homogène de viscosité constante**.

La forme de ces équations a été établie au **chapitre 8** dans le cas où la force de volume est le poids, cf. (8.3.19). Si l'on généralise cela à une force conservative quelconque de potentiel ϕ , ces équations sont :

$$(A11.1.1) \quad \begin{cases} \text{div } \underline{u} = 0 \\ \frac{d\underline{u}}{dt} = -\underline{\text{grad}} \phi - \underline{\text{grad}} \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \underline{u} \end{cases}$$

On cherche à exprimer ces équations dans un référentiel relatif entraîné dans un mouvement de rotation de corps solide de taux $\underline{\Omega}_0$ constant.

➤ Lois de composition des vitesses et des accélérations

De façon générale, on posera pour tout vecteur \underline{A} :

$$(A11.1.2) \quad \begin{cases} \underline{A} = A_i \underline{e}_i & \text{- repère absolu} \\ \underline{A} = A'_i \underline{e}'_i & \text{- repère relatif} \end{cases}$$

Si l'on note $d/dt)_a$ la dérivation dans le référentiel absolu et $d/dt)_r$, dans le repère relatif tournant à la vitesse angulaire $\underline{\Omega}_0$ constante, on a alors :

$$(A11.1.3) \quad \left. \frac{d\underline{A}}{dt} \right)_a = \frac{dA_i}{dt} \underline{e}_i = \frac{dA'_i}{dt} \underline{e}'_i + A'_i \frac{d\underline{e}'_i}{dt} = \frac{dA'_i}{dt} \underline{e}'_i + A'_i (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{e}'_i) = \left. \frac{d\underline{A}}{dt} \right)_r + \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{A}$$

On retient donc que :

$$(A11.1.4) \quad \left. \frac{d\underline{A}}{dt} \right)_a = \left. \frac{d\underline{A}}{dt} \right)_r + \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{A}$$

En appliquant cela au vecteur position $\underline{A} = \underline{x}$, il vient :

$$(A11.1.5) \quad \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)_r + \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}$$

D'où la **loi de composition des vitesses** :

$$(A11.1.6) \quad \boxed{\underline{u}_a = \underline{u}_r + \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}}$$

où \underline{u}_a et \underline{u}_r désignent respectivement la vitesse absolue et la vitesse relative.

Si l'on applique maintenant (A11.1.4) à la vitesse $\underline{A} = \underline{u}_a$, on obtient pour les accélérations :

$$(A11.1.7) \quad \left(\frac{d\underline{u}_a}{dt} \right)_a = \frac{d}{dt} (\underline{u}_r + \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) \Big|_a = \left(\frac{d}{dt} (\underline{u}_r + \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) \right)_r + \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{u}_r + \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})$$

D'où la **loi de composition des accélérations** :

$$(A11.1.8) \quad \boxed{\left(\frac{d\underline{u}_a}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\underline{u}_r}{dt} \right)_r + \underbrace{2\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{u}_r}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})}_{\text{centrifuge}}}$$

Comme indiqué, on identifie dans cette expression l'accélération de Coriolis et l'accélération centrifuge.

➤ Application aux équations du mouvement

L'application de ces relations aux équations du mouvement (A11.1.1) donne les relations suivantes.

✓ Continuité

$$(A11.1.9) \quad \text{div } \underline{u}_a = \text{div } \underline{u}_r + \text{div } (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) = 0$$

Le second terme, qui est la divergence d'une rotation de corps rigide, est nul.

Démonstration - Cela se démontre au moyen de l'identité vectorielle (cf. annexe **A2.4**) : $\text{div}(\underline{A} \wedge \underline{B}) = \underline{B} \text{ rot } \underline{A} - \underline{A} \text{ rot } \underline{B}$. Pour $\underline{A} = \underline{\Omega}_0$, $\underline{B} = \underline{x}$, le premier terme est nul car $\underline{\Omega}_0 = \text{const.}$, et le second terme donne : $(\text{rot } \underline{x})_i = \varepsilon_{ijk} \partial x_j / \partial x_k = 0$

Donc :

(A11.1.10)

$$\boxed{\text{div } \underline{u}_r = 0}$$

✓ Quantité de mouvement

Le terme d'accélération est donné ci-dessus, en (A11.1.8). On peut mettre alors l'accélération centrifuge sous la forme d'un gradient au moyen de l'identité vectorielle :

(A11.1.11)

$$\underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) = -\frac{1}{2} \underline{\text{grad}} (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2$$

Démonstration -

$$\frac{1}{2} \underline{\text{grad}} (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2 = (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) \cdot \underline{\text{grad}} (\underbrace{\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}}_{\underline{\Omega} \cdot \underline{x}}) = (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) \cdot \underline{\Omega} = (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) \wedge \underline{\Omega}_0 = -\underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})$$

En regroupant les trois gradients que l'on trouve alors dans l'équation du mouvement (A11.1.1), on fait apparaître un potentiel généralisé que l'on note Π , tel que :

(A11.1.12)

$$\boxed{\Pi = \frac{p}{\rho} + \phi - \frac{1}{2} (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2}$$

Enfin, pour ce qui est du terme de diffusion, on a :

(A11.1.13)

$$\Delta \underline{u}_a = \Delta \underline{u}_r + \Delta (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) = \Delta \underline{u}_r$$

Le second terme à droite de la première égalité est nul puisqu'il effectue la dérivée seconde (laplacien Δ) d'une fonction affine.

En définitive, dans un repère tournant à la vitesse angulaire constante $\underline{\Omega}_0$, la loi de la dynamique d'un fluide incompressible homogène de viscosité constante est :

$$(A11.1.14) \quad \boxed{\frac{d\underline{u}}{dt} + 2\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{grad} \Pi + \nu \Delta \underline{u}}$$

où le potentiel Π est celui défini en (A11.1.12).

➤ La charge totale dans un écoulement tournant

Comme annoncé, la relation (A11.1.12) prouve que dans un repère tournant la charge totale H comprend le potentiel centrifuge $-\frac{1}{2}(\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2$ en plus de la densité d'énergie potentielle mécanique usuelle $\frac{p}{\rho} + \phi$.

A11.2 Le premier théorème de Bernoulli en repère tournant - Exemple d'application : les pompes et les turbines centrifuges

Source : G.K. Batchelor, An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, 1994, p.396.

Considérons le cas d'une conduite tournante schématisé sur la figure **A11.1** ci-dessous. Comme le tourniquet présenté dans un approfondissement au **chapitre 6** lors de l'examen des bilans dans les volumes de contrôle, cf. figure **6.9**, le système est constitué par une conduite verticale dans laquelle le fluide monte et débouche dans une conduite horizontale de rayon R ouverte à ses deux extrémités. On suppose que le système peut tourner librement autour de son axe vertical avec un taux de rotation Ω_0 constant.

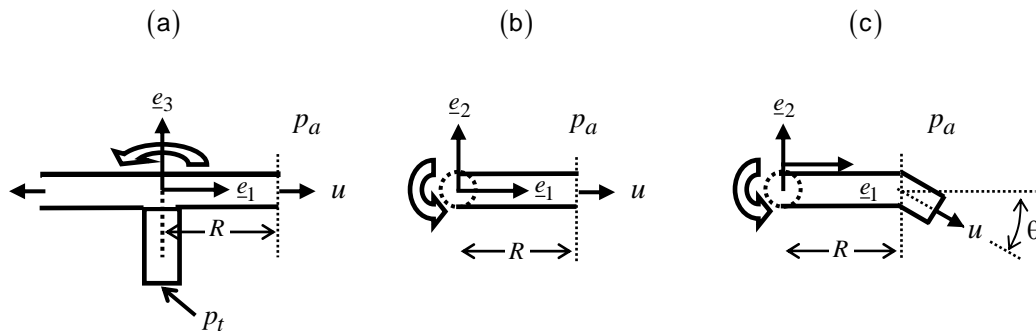


Figure A11.1 - Application du premier théorème de Bernoulli en repère tournant : (a) et (b) la pompe centrifuge, (c) la turbine.

On se propose d'appliquer le premier théorème de Bernoulli entre la section d'entrée de l'écoulement et l'une des sections de sortie, donc dans un repère lié au mouvement rotatif du dispositif. Il faut considérer dans ce cas la forme **(11.2.7)** du théorème, c.-à-d. celle qui tient compte du potentiel centrifuge :

$$(A11.2.1) \quad H = e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}(\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2 + \phi = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

L'origine de ce terme supplémentaire est expliquée dans l'annexe précédente.

Si on suppose le fluide **incompressible homogène** et si on néglige les forces de volume conservatives autres que la force centrifuge, soit $\phi = 0$, la relation **(A11.2.1)** devient :

$$(A11.2.2) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}(\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2 = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

On appliquera par ailleurs l'hypothèse de l'**écoulement unidirectionnel** à laquelle nous avons largement fait appel au **chapitre 6**.

L'écoulement qui pénètre au centre de la conduite horizontale tournante est caractérisé par une pression d'arrêt p_t . C'est la pression qui règne dans le milieu extérieur où l'on plonge le tuyau de pompage vertical. Si u et p_a désignent la vitesse et la pression statique ambiante dans les sections de sortie du dispositif l'application de (A11.1.2) entre la section d'entrée et l'une des sections de sortie donne :

$$(A11.2.3) \quad \frac{p_t}{\rho} - \frac{1}{2}\Omega_0^2 R^2 = \frac{p_a}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\Omega_0^2 R^2 = \text{const.}, \text{ le long des lignes de courant}$$

On en déduit que :

$$(A11.2.4) \quad u^2 = 2 \frac{p_t - p_a}{\rho} + \Omega_0^2 R^2$$

On voit ainsi que si l'on impose la rotation Ω_0 , étant donné p_a , on peut créer une dépression ($p_a - p_t$) à l'entrée du système. C'est le principe de la **pompe centrifuge**. La dépression maximale que l'on peut obtenir est fixée par la condition $u = 0$ et elle vaut :

$$(A11.2.5) \quad \Delta p_{\max} = p_a - p_{t,\min} = \frac{1}{2}\rho\Omega_0^2 R^2$$

On peut ainsi aspirer du fluide et le refouler à la vitesse u .

Si maintenant on coupe la rotation, conformément à (A11.2.4), on n'obtient $u \neq 0$ que si $p_t \geq p_a$. Mais si le système est libre de tourner, en courbant les extrémités de la conduite horizontale conformément à la figure A11.1 (c), une partie de la charge disponible $p_t - p_a$ peut être utilisée pour mettre le système en rotation. Ce dernier fonctionne alors comme une **turbine**. Le couple produit par la déviation d'angle θ au bout d'une distance R dans chacune des deux branches de la conduite horizontale vaut approximativement :

$$(A11.2.6) \quad T = -\dot{m} R u \sin \theta$$

où \dot{m} désigne le débit masse (en $kg.s^{-1}$). Cela redonne bien le résultat obtenu en (6.4.30) (pour $\alpha = 0$, cf. figure 6.9). Aux extrémités, le fluide est éjecté avec une composante de vitesse radiale $u \cos \theta$ et une composante orthoradiale $u \sin \theta$. D'après (A11.2.4) ces deux composantes de la vitesse vérifient :

$$(A11.2.7) \quad \begin{cases} u \cos \theta = \sqrt{2 \frac{p_t - p_a}{\rho}} \\ u \sin \theta = -\Omega_0 R \end{cases}$$

Le taux de rotation du système vaut donc :

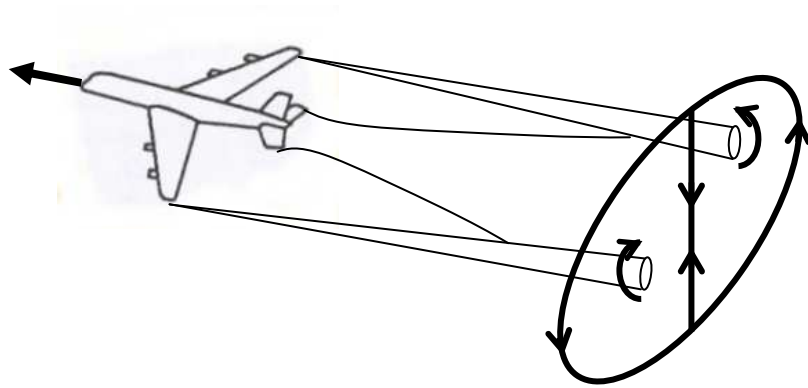
$$(A11.2.8) \quad \Omega_0 = -\frac{u \sin \theta}{R}$$

C'est la formule obtenue en (6.4.31) au **chapitre 6** (pour $\alpha = 0$). On note alors que la vitesse d'éjection radiale $u \cos \theta$ ne dépend que de la pression totale p_t avec laquelle on alimente le tourniquet. Cela signifie que l'aire arrosée ne dépend pas de l'angle θ . Elle est uniquement déterminée par la pression d'alimentation p_t . Toutefois, elle dépend aussi de l'angle d'inclinaison verticale α défini sur la figure 6.9.

L'hypothèse du fluide parfait est évidemment discutable dans cette application car l'écoulement est partout le siège de frottements visqueux. Les valeurs données ci-dessus sont donc des maximums et elles doivent être pondérées pour tenir compte des mécanismes visqueux négligés. Mais il n'empêche que c'est bien **un raisonnement de type fluide parfait** qui permet de comprendre le principe de ces machines.

Chapitre 12

Écoulements rotationnels - écoulements irrotationnels



Chapitre 12. Ecoulements rotationnels - Ecoulements irrotationnels	432
12.1 La relation de Crocco.....	432
12.2 La relation de Crocco : le cas des écoulements stationnaires de fluide parfait	434
Interprétation	435
12.3 La relation de Crocco : cas du fluide barotrope	437
12.4 La relation de Crocco : le cas des écoulements stationnaires de fluide parfait incompressible homogène sans force de volume	439
Le cas des écoulements bidimensionnels	439
L'exemple du tourbillon irrotationnel ponctuel isolé.....	442
Conclusion	443
12.5 Le théorème de Kelvin et le théorème de Lagrange	444
Le théorème de Kelvin.....	444
Le théorème de Lagrange.....	447
Applications du théorème de Lagrange : un exemple.....	448
Approfondissement * - Application du théorème de Lagrange : deux autres exemples	449
Conclusion	450
12.6 Résumé des formules essentielles	451
 Annexes	
A12.1 Démonstration de la décomposition de Lamb	A12.1
A12.2 Dérivée d'une intégrale linéique matérielle : démonstration	A12.2

Chapitre 12. Ecoulements rotationnels - Ecoulements irrotationnels

12.1 La relation de Crocco

Conformément aux équations (11.2.5) ou (11.2.6) du chapitre précédent, si les conditions d'un **écoulement stationnaire de fluide parfait** sont respectées, la charge totale H est constante le long de chaque ligne de courant. Nous allons maintenant nous intéresser ici à la façon dont H varie **d'une ligne de courant à l'autre**. Rappelons que si ces variations sont nulles, alors l'écoulement est **homoénergétique**, cf. (5.5.21). Sinon il n'est qu'**isoénergétique**, cf. (5.5.19). On cherche donc à caractériser les conditions qui distinguent ces deux situations.

Pour cela l'équation de bilan local de H (11.2.5) ne nous est d'aucun secours car elle ne décrit que les variations de H le long des lignes de courant d'un écoulement de fluide parfait stationnaire. Comme nous l'avons fait pour établir le théorème de la pression au chapitre précédent, nous allons repartir de l'équation de la dynamique du fluide parfait (8.4.10) (Euler) dans laquelle nous ferons de nouveau l'hypothèse que les forces volumiques dérivent d'un potentiel. Par contre, nous ne supposons plus que l'écoulement est permanent. Une fois divisée par ρ cette équation s'écrit :

$$(12.1.1) \quad \frac{d\underline{u}}{dt} = - \underline{\text{grad}} \phi - \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p$$

Nous voulons faire apparaître la charge totale $H = e + p/\rho + \frac{1}{2}\underline{u}^2 + \phi$ dans cette équation.

Pour cela, il faut procéder en trois étapes.

✓ Une première opération consiste à faire apparaître le gradient de l'**énergie potentielle de pression** p/ρ . Pour cela, on utilise l'identité vectorielle (cf. annexe A2.4) : $\underline{\text{grad}} (a b) = a \underline{\text{grad}} b + b \underline{\text{grad}} a$. Soit pour $a = 1/\rho$ et $b = p$:

$$(12.1.2) \quad -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p = -\underline{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} \right) + p \underline{\text{grad}} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

A ce stade, on obtient alors :

$$(12.1.3) \quad \frac{d\underline{u}}{dt} = -\underline{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} + \phi \right) + p \underline{\text{grad}} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

✓ Il s'agit maintenant de faire apparaître le gradient de l'**énergie cinétique**. Pour cela on transforme l'accélération convective $\nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$ qui intervient dans la dérivée particulaire $d\underline{u}/dt = \partial \underline{u}/\partial t + \nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$ au moyen d'une identité vectorielle (cf. dernière identité de l'annexe A2.4) appelée **décomposition de Lamb**, qui est :

$$(12.1.4) \quad \boxed{\nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = \underline{\omega} \wedge \underline{u} + \underline{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} \underline{u}^2 \right)}$$

où $\underline{\omega}$ désigne la vorticité $\underline{\omega} \equiv \underline{\text{rot}} \underline{u}$, cf. (2.10.3). Cette identité vectorielle usuelle est importante et nous la démontrons à toutes fins utiles en annexe, cf. annexe A12.1. Elle fait apparaître le gradient de l'énergie cinétique ainsi qu'un second terme, une accélération « rotatoire » $\underline{\omega} \wedge \underline{u}$ liée à la **vorticité** du fluide. Ce terme est appelé **vecteur de Lamb**. Comme nous allons le voir, le vecteur de Lamb constitue la clef de voûte de la relation que nous voulons établir. Nous préciserons sa signification physique en temps voulu. Pour l'instant, nous prenons la relation (12.1.4) comme une « identité vectorielle parmi d'autres ». À ce stade (12.1.3) devient :

$$(12.1.5) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge \underline{u} = -\underline{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\underline{u}^2}{2} + \phi \right) + p \underline{\text{grad}} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

C'est une forme particulière de l'équation d'Euler que nous utiliserons plus tard dans le **chapitre 14** consacré à la dynamique de la vorticité.

✓ Enfin, pour obtenir le gradient de la charge totale, on doit maintenant faire apparaître l'**énergie interne**. On fait appel pour cela au premier principe de la thermodynamique et à la notion d'entropie que résume la relation de Gibbs (A1.1.2) :

$$(12.1.6) \quad de = Tds - p d \left(\frac{1}{\rho} \right),$$

Nous en déduisons que :

$$(12.1.7) \quad \underline{\text{grad}} e = T \underline{\text{grad}} s - p \underline{\text{grad}} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

Remarque -

L'implication entre (12.1.4) et (12.1.5) mérite un commentaire. Considérons deux « particules de fluide » infiniment proches, de même composition chimique, de même température T et de même pression p . Dans un milieu divariant leurs propriétés thermodynamiques sont entièrement caractérisées par deux variables indépendantes que nous prenons ici comme étant e et ρ . Après un déplacement infinitésimal quelconque fictif de ces deux particules leurs états thermodynamiques diffèrent alors conformément à la relation (12.1.7). Si les deux particules appartiennent à une même trajectoire, alors cela revient à considérer une seule et même particule de fluide dont on suit la transformation entre deux points consécutifs de la trajectoire ; dans ce cas, c'est le mouvement du fluide qui effectue lui-même la transformation de l'état de cette particule unique. On peut alors traduire la relation ci-dessus par des dérivées particulières en lieu et place des gradients, comme écrit par exemple en (5.7.2) dans le chapitre 5.

En exprimant le dernier terme de (12.1.3) au moyen de (12.1.7), on obtient alors :

$$(12.1.8) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge \underline{u} = - \underline{\text{grad}} \left(\underbrace{e + \frac{p}{\rho} + \frac{\underline{u}^2}{2} + \phi}_H \right) + T \underline{\text{grad}} s$$

où apparaît comme indiqué la charge totale H . Cette dernière équation est appelée **relation de Crocco**, du nom de Gaetano Crocco qui l'a établie en 1937. Cette relation est donc une forme particulière de l'équation de la dynamique valable pour un écoulement de fluide parfait où les forces volumiques dérivent d'un potentiel.

12.2 La relation de Crocco : le cas des écoulements stationnaires de fluide parfait

Dans le cas où l'écoulement est **stationnaire**, on obtient à partir de (12.1.8) :

$$(12.2.1) \quad \underline{\omega} \wedge \underline{u} = - \underline{\text{grad}} H + T \underline{\text{grad}} s$$

C'est la **version stationnaire de la relation de Crocco**. Le fluide parfait étant isentropique, tel que $\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} s = 0$, puisque $\underline{u} \cdot (\underline{\omega} \wedge \underline{u}) = 0$, la contraction de (12.2.1) avec la vitesse restitue le premier théorème de Bernoulli dans sa version générale, $\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} H = 0$, cf. (11.2.5). Mais l'intérêt de la relation de Crocco ne se limite pas à reproduire le premier théorème de Bernoulli que nous avons déjà établi : elle traduit aussi l'existence d'un lien entre les **propriétés thermodynamiques** du fluide (énergie, entropie), ses **propriétés cinématiques** (sa vitesse et sa vorticit  ) et ses **propri  t  s dynamiques** (caract  ris  es ici par l'acc  l  ration $\underline{\omega} \wedge \underline{u}$). Cette relation r  v  le en particulier un r  sultat important :

Dans un **  coulement stationnaire de fluide parfait**, les variations d'une ligne de courant    l'autre de la charge totale H du fluide et celles de son entropie sont reli  es au caract  re **rotationnel** de l'  coulement.

➤ Interpr  tation

C'est le **vecteur de Lamb** $\underline{\omega} \wedge \underline{u}$ qui appara  t dans la **d  composition de Lamb** de l'acc  l  ration convective (12.1.4) qui introduit donc la **vorticit  ** dans l'  quilibre g  n  ral (12.2.1) d'un   coulement de fluide parfait permanent. Pour   clairer la signification de ce terme, on se place de nouveau dans un syst  me de coordonn  es intrins  ques li   aux lignes de courant (rep  re de Frenet). Nous nous limitons ici au cas d'un   coulement bidimensionnel. Dans un   coulement bidimensionnel, en se r  f  rant    la figure 12.1 (a) ci-dessous, toutes les variations de la vitesse sont contenues dans le plan $(\underline{e}_s, \underline{e}_n)$. Dans ces conditions, la vorticit   $\underline{\omega} = \underline{\text{rot}} \underline{u}$ ne poss  de qu'une composante non nulle, et cette composante est port  e par le vecteur $\underline{e}_b = \underline{e}_s \wedge \underline{e}_n$ normal au plan :

$$(12.2.2) \quad \underline{\omega} = \omega(s, n) \underline{e}_b$$

Le **vecteur de Lamb** ne poss  de alors qu'une composante port  e par la normale locale \underline{n} , cf. figure 12.1 (b) :

$$(12.2.3) \quad \underline{\omega} \wedge \underline{u} = q \omega (\underline{e}_b \wedge \underline{e}_s) = q \omega \underline{e}_n$$

Le **vecteur de Lamb** repr  sente donc une acc  l  ration perpendiculaire    l'  coulement. Cette acc  l  ration n'est due qu'au caract  re **rotationnel local du fluide**.

Remarque -

Elle se distingue ainsi de l'accélération inertielle de Coriolis qui se manifeste, elle, dans un fluide soumis à un mouvement de rotation **global** de l'ensemble du fluide (voir à ce sujet l'annexe **A11.1** du chapitre précédent).

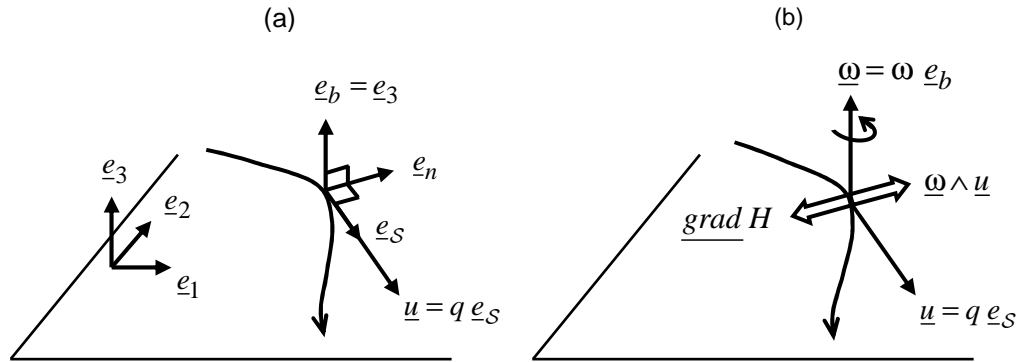


Figure 12.1 - Écoulement bidimensionnel rotationnel : (a) coordonnées intrinsèques liées à une ligne de courant dans le plan (e_1, e_2) , (b) vitesse, vorticité et équilibre entre l'accélération rotatoire (vecteur de Lamb) et le gradient de la charge H (cas homoentropique $s = \text{const.}$).

Après multiplication de ce vecteur par la masse volumique, on obtient une force volumique $\rho \underline{\omega} \wedge \underline{u}$ qui correspond à une **force de déflexion**, où **force de portance**, ou encore **force de Magnus** par référence à l'effet Magnus qui tend à dévier un objet de sa trajectoire rectiligne initiale dans un fluide selon le signe de sa rotation (c'est l'effet de « *lift* » pour les balles de jeu que nous détaillerons dans un approfondissement dans le prochain chapitre).

En projetant l'équation de Crocco stationnaire (12.2.1) dans le repère intrinsèque, selon e_s puis selon e_n , on obtient :

$$(12.2.4) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial H}{\partial s} \\ q \omega = -\frac{\partial H}{\partial n} + T \frac{\partial s}{\partial n} \end{cases}$$

La première équation correspond au premier théorème de Bernoulli. La seconde montre alors que :

✓ Si l'écoulement est **rotationnel**, tel que $\omega \neq 0$, conformément à (12.2.4), il ne peut pas être à la fois homoentropique et homoénergétique. L'accélération caractérisée par le vecteur de Lamb « pousse » en effet le fluide dans une direction normale à l'écoulement ; si

l'écoulement est homoentropique par exemple, cette force est alors équilibrée par une variation de la charge totale H du fluide dans cette direction, cf. figure 12.1 (b).

✓ Si l'écoulement de fluide parfait est **irrotationnel**, donc ici tel que $\omega = 0$, alors H peut varier d'une ligne de courant à l'autre dans la mesure où le fluide qui se trouve sur ces lignes de courant n'a pas la même entropie. Ces variations d'entropie ne peuvent provenir que des conditions amont puisque nous sommes dans le cadre des écoulements de fluide parfait, donc isentropiques. Dans le cas contraire, donc si l'écoulement est **homoentropique**, c.-à-d. issu de conditions amont où l'entropie est uniforme, alors H est constant dans tout l'écoulement. L'écoulement est alors **homoénergétique**.

12.3 La relation de Crocco : cas du fluide barotrope

Dans le prochain chapitre nous allons établir une deuxième version du **théorème de Bernoulli**, qui se distingue de la première que nous avons vue au chapitre précédent par le fait qu'elle s'applique aux écoulements stationnaires irrotationnels. Nous aurons besoin pour cela d'une version particulière de la relation de Crocco qui est celle relative au cas d'un **fluide barotrope**. Cette notion, la barotropie, a été introduite dans le paragraphe 4.5 du chapitre 4 consacré à la statique des fluides. Un fluide barotrope vérifie, cf. (4.5.25) :

$$(12.3.1) \quad \rho = \rho(p)$$

Dans ce cas, on peut écrire :

$$(12.3.2) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \times \frac{\partial}{\partial p} \int \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \times \frac{1}{\rho}$$

Soit :

$$(12.3.3) \quad \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p = \underline{\text{grad}} \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

Le premier membre de cette relation vérifie par ailleurs :

$$(12.3.4) \quad \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p = \underline{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} \right) - p \underline{\text{grad}} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

En utilisant de nouveau la relation de Gibbs (12.1.6) pour exprimer le dernier terme de la relation ci-dessus, on obtient :

$$(12.3.5) \quad \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p = \underline{\text{grad}} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) - T \underline{\text{grad}} s$$

En utilisant la relation (12.3.3) on obtient donc :

$$(12.3.6) \quad \underline{\text{grad}} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) = \underline{\text{grad}} \int \frac{dp}{\rho(p)} + T \underline{\text{grad}} s$$

En remplaçant cela dans la relation de Crocco générale (12.1.8), on obtient finalement la relation :

$$(12.3.7) \quad \boxed{\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge \underline{u} = - \underline{\text{grad}} \left(\int \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{\underline{u}^2}{2} + \phi \right)},$$

dans laquelle l'entropie a été éliminée. C'est la **version barotrope de la relation de Crocco**. Cette relation est donc une forme particulière de l'équation de la dynamique valable pour un écoulement de fluide parfait barotrope où les forces volumiques dérivent d'un potentiel.

Rappelons que parmi les exemples de fluide barotrope cités au **chapitre 4** nous avons retenu :

- ✓ le gaz thermiquement parfait isotherme ($\rho = \text{const.} \times p$),
- ✓ le gaz thermiquement et calorifiquement parfait homoentropique ($\rho = \text{const.} \times p^{1/\gamma}$,
 $T = \text{const.} \times \rho^{\gamma-1}$),
- ✓ le fluide incompressible homogène ($\rho = \text{const.}$).

Nous allons détailler le dernier cas.

12.4 La relation de Crocco : le cas des écoulements stationnaires de fluide parfait incompressible homogène sans force de volume

Un écoulement de **fluide incompressible homogène** vérifie $\rho = \text{const.}$, d'où $\int dp/\rho(p) = p/\rho + \text{const.}$. Si cet écoulement est **stationnaire** et si l'on **néglige les forces de volume**, la relation de Crocco (12.3.7) devient :

$$(12.4.1) \quad \boxed{\underline{\omega} \wedge \underline{u} = -\underline{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\underline{u}^2}{2} \right)}$$

Remarque -

Une autre manière d'obtenir cette relation sans passer par la relation barotrope (12.3.3) consiste à remarquer que pour $\rho = \text{const.}$, la relation de Gibbs (12.1.6) se réduit à :

$$(12.4.2) \quad \underline{\text{grad}} e = T \underline{\text{grad}} s,$$

ce qui élimine l'énergie interne et l'entropie de la relation générale (12.1.8). Celle-ci se réduit alors à (12.4.1) dans le cas d'un écoulement stationnaire sans potentiel des forces extérieures.

En contractant la relation (12.4.1) avec la vitesse \underline{u} on retrouve le premier théorème de Bernoulli sous sa forme (11.2.14) (conservation de la pression d'arrêt $p_{st} = p + \frac{1}{2}\rho \underline{u}^2$ le long des lignes de courant). La projection de cette relation dans la direction normale aux lignes de courant va nous permettre alors de caractériser alors la notion d'écoulement courbe irrotationnel.

➤ Le cas des écoulements bidimensionnels

On suppose que l'écoulement est **bidimensionnel** et on projette la relation (12.4.1) dans le repère de Frenet de la figure 12.1 où la vorticité ne possède qu'une composante portée par la binormale \underline{b} , soit $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_b$. Le vecteur de Lamb vaut dans ce cas :

$$(12.4.3) \quad \underline{\omega} \wedge \underline{u} = q \omega \underline{e}_b \wedge \underline{e}_s = q \omega \underline{e}_n$$

D'où pour la projection de la formule (12.4.1) dans la direction \underline{e}_n normale aux lignes de courant :

$$(12.4.4) \quad q \, \omega = -\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - q \frac{\partial q}{\partial n}$$

En faisant alors appel à la relation (11.5.10) du chapitre précédent qui caractérise l'équilibre cyclostrophique entre la force centrifuge $\rho q^2/\mathcal{R}$ et le gradient de pression $-\partial p/\partial n$ (théorème de la pression), il vient :

$$(12.4.5) \quad q \, \omega = -\frac{q^2}{\mathcal{R}} - q \frac{\partial q}{\partial n}$$

En simplifiant par q , on trouve pour la vorticité :

$$(12.4.6) \quad \omega = \underbrace{-\frac{q}{\mathcal{R}}}_{\text{effet de courbure}} - \underbrace{\frac{\partial q}{\partial n}}_{\text{cisaillement local}}$$

Comme indiqué dans cette relation, on peut interpréter la vorticité ω comme la superposition d'une **vorticité d'entraînement** $-q/\mathcal{R}$ due à l'effet de la courbure de la ligne de courant et d'une **vorticité relative** $-\partial q/\partial n$ due au cisaillement local de l'écoulement. Le fait important ici est que lorsque la somme de ces deux sources de rotationnel s'annulent, « bien qu'il tourne » ($\mathcal{R} \neq \infty$), un écoulement peut être irrotationnel.

Trois situations qui illustrent ces idées sont montrées sur la figure 12.2 ci-dessous.

✓ La première situation, celle schématisée sur la figure 12.2(a), correspond à un écoulement uniforme rectiligne, donc irrotationnel.

Remarque -

On a schématisé sur la seconde ligne de la figure le comportement d'un volume élémentaire de fluide dans cet écoulement.

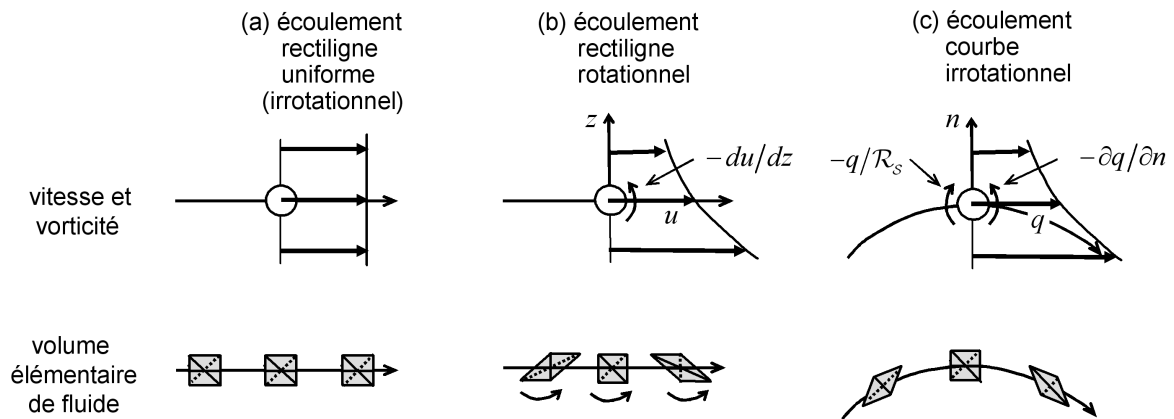


Figure 12.2 - Écoulements stationnaires bidimensionnels incompressibles homogènes : (a) écoulement rectiligne uniforme (irrotationnel), (b) : écoulement rectiligne cisaillé (rotationnel), (c) écoulement courbe cisaillé irrotationnel.

✓ La deuxième situation, celle de la figure **12.2 (b)**, est celle d'un écoulement unidirectionnel cisaillé. Ce cas correspond par exemple au premier problème de Stokes traité dans le chapitre **10** (voir figure **10.8**), ou à l'écoulement de Poiseuille entre deux plaques parallèles (traité en géométrie cylindrique au **chapitre 9**, cf. figure **9.1**). Dans cette situation le rotationnel vaut $\omega = -du/dz$. Il ne peut s'agir d'un écoulement de fluide parfait car nous savons que ces écoulements sont dominés par le frottement visqueux.

Remarque -

Comme schématisé sur la seconde ligne de cette figure, les volumes élémentaires se déforment conformément à la phénoménologie des écoulements cisaillés expliquée au **chapitre 2**, cf. figure **2.34**, c'est-à-dire sous l'effet cumulé d'une déformation d'axes propres inclinés à $\pm 45^\circ$ et d'une rotation de taux $\Omega = \omega/2$.

✓ Enfin, le troisième cas, celui de la figure **12.2 (c)**, est celui d'un écoulement cisaillé courbe irrotationnel où les deux termes qui composent la vorticité, cf. **(12.4.6)**, s'annulent.

Remarque -

Dans ce cas, l'irrotationnalité se traduit au niveau du comportement des volumes élémentaires de fluide par la conservation de l'**orientation** des vecteurs matériels correspondant aux diagonales de ces éléments : **le volume élémentaire ne tourne pas**. Par contre il se déforme sous l'effet du tenseur des taux de déformation qui caractérise la partie irrotationnelle de la distorsion générale du fluide. Cette déformation, d'axes propres orientés à $\pm 45^\circ$ par rapport à la tangente locale de la ligne de courant est aussi celle qui transforme l'élément de fluide cisaillé de la figure **12.2 (b)**, mais maintenant, comme représenté au bas de la figure **12.2 (c)**, il se superpose une rotation d'entraînement qui maintient l'orientation des diagonales du volume élémentaire.

➤ **L'exemple du tourbillon irrotationnel ponctuel isolé**

Le tourbillon irrotationnel constitue l'exemple type d'un écoulement irrotationnel « qui tourne ». La notion de **tourbillon** a déjà été définie dans le **chapitre 2**, cf. figure **2.26**. La notion de **tourbillon irrotationnel** correspond à celle du modèle de **tourbillon filament** défini sur la figure **2.26 (b)**. C'est un modèle d'écoulement dans lequel la vorticité est concentrée sur une ligne singulière, tout le reste de l'écoulement demeurant irrotationnel. Dans le cas particulier où les lignes de courant de cet écoulement forment des cercles, on peut raisonner dans un système de coordonnées polaires (r, θ) . Le champ de vitesse vérifie $\underline{u} = u_\theta(r) \underline{e}_\theta$. Compte tenu de (12.4.6) l'irrotationnalité $\omega = 0$ se traduit dans ce cas par :

$$(12.4.7) \quad \frac{u_\theta}{r} = -\frac{\partial u_\theta}{\partial r}$$

Cela s'intègre comme :

$$(12.4.8) \quad u_\theta(r) = \frac{const.}{r}$$

La constante est déterminée par la **circulation** du vecteur vitesse, cf. (2.10.7) :

$$(12.4.9) \quad \Gamma = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{l} = \oint_C u_\theta(r) r d\theta = 2\pi \times const.$$

Soit en définitive :

$$(12.4.10) \quad \boxed{u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}}$$

Mais on a aussi, toujours d'après (2.10.7) :

$$(12.4.11) \quad \Gamma = \iint_S \underline{\omega} \cdot \underline{n} dS = 2\pi \int_0^r \omega(r') r' dr' = 2\pi \times const.$$

Soit :

$$(12.4.12) \quad \int_0^r \omega(r') r' dr' = \text{const.}$$

La solution de cette équation est une distribution de Dirac localisée au centre de l'écoulement :

$$(12.4.13) \quad \boxed{\omega(r) = \Gamma \delta(r)}$$

Les équations (12.4.10) et (12.4.13) définissent un **tourbillon ponctuel**. L'allure du champ de vitesse et de vorticité correspondant est schématisé la figure 12.3 ci-dessous. Cet écoulement est donc irrotationnel, sauf en son centre qui se caractérise par la présence d'une **singularité rotationnelle**.

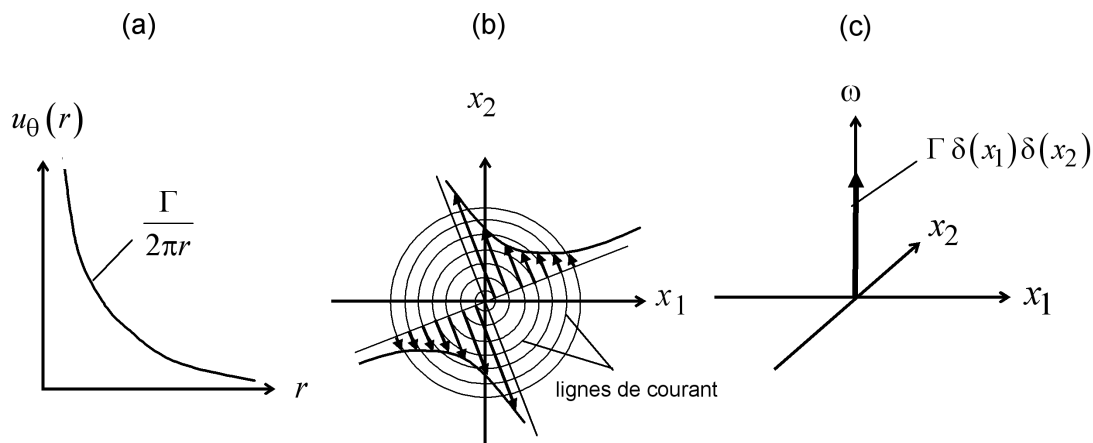


Figure 12.3 - Tourbillon ponctuel : (a) loi de vitesse, (b) lignes de courant, (c) distribution de la vorticité (singularité).

Le tourbillon ponctuel constitue l'une des briques de base de la description des **écoulements bidimensionnels et irrotationnels de fluide parfait incompressible homogène** (écoulements potentiels) que nous développerons dans le prochain chapitre. C'est une notion clef de la mécanique des fluides à laquelle on se réfère très souvent pour interpréter les écoulements de fluide.

➤ Conclusion

De cette analyse on peut tirer une conséquence importante, d'ordre général, pour les propriétés du fluide parfait :

Un écoulement de fluide parfait peut **tourner** (au sens où ses **lignes de courant** sont **courbes**) tout en étant **irrotationnel**.

12.5 Le théorème de Kelvin et le théorème de Lagrange

La relation de Crocco révèle donc le rôle de la vorticité dans les écoulements de fluide. Elle distingue ce faisant le cas particulier des ** coulements irrotationnels de fluide parfait** : partant de conditions initiales simples, c.- -d. homoentropiques et homo nerg tiques (comme celles que l'on essaye de produire dans une soufflerie par exemple), l'écoulement ne pourra conserver ces propriétés que s'il demeure irrotationnel.

L'hypothèse d'écoulement **irrotationnel** se trouve être justifiée dans de nombreux cas pratiques par deux théorèmes importants qui définissent les conditions de son application. Il s'agit du **théorème de Kelvin** et du **théorème de Lagrange** que nous allons présenter maintenant.

➤ Le théorème de Kelvin

Théorème de Kelvin -

Soit un contour matériel $C(t)$ fermé entraîné par un ** coulement de fluide parfait** ne coupant aucune surface de discontinuité. Si le fluide est **barotrope**, et soumis uniquement à **des forces dérivant d'un potentiel**, alors la circulation de la vitesse le long de ce contour est une constante :

$$(12.5.1) \quad \Gamma = \oint_{C(t)} \underline{u} \cdot d\underline{l} = \text{const.}$$

Corollaire : en appliquant la formule de Stokes, cf. (2.10.7), on peut aussi écrire :

$$(12.5.2) \quad \Gamma = \iint_{S(t)} \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, dS = \text{const.},$$

où $S(t)$ désigne une surface quelconque s'appuyant sur le contour $C(t)$. Cela implique notamment que, dans les conditions du théorème ci-dessus, le flux du vecteur vorticité à travers toute surface matérielle est une constante.

Afin de démontrer méthodiquement ce théorème, classons tout d'abord ses hypothèses dans l'ordre où nous allons les utiliser :

H1 - Le contour matériel $C(t)$ est fermé et ne coupe aucune discontinuité ;

H2 - Le fluide est parfait ;

H3 - Les forces de volumes dérivent d'un potentiel ;

H4 - Le fluide est barotrope, donc tel que $\rho = \rho(p)$, cf. (4.5.25).

La démonstration de la relation (12.5.1) repose sur l'application du **théorème de transport** vu au **chapitre 3** à une **intégrale linéique matérielle**. Comme démontré rigoureusement dans l'annexe **A12.2** de ce chapitre à partir d'un raisonnement sur les variables lagrangiennes, la dérivée temporelle de l'intégrale matérielle (12.5.1) revient à dériver « sans état d'âme » sous le signe somme :

$$(12.5.3) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C(t)} \frac{d}{dt} (\underline{u} \cdot \underline{dl}) = \oint_{C(t)} \left[\frac{d\underline{u}}{dt} \cdot \underline{dl} + \underline{u} \cdot \frac{d(\underline{dl})}{dt} \right]$$

Le dernier terme fait intervenir la déformation linéique du vecteur matériel \underline{dl} . On a :

$$(12.5.4) \quad \frac{d(\underline{dl})}{dt} = d\underline{u}$$

Donc :

$$(12.5.5) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C(t)} \left(\frac{d\underline{u}}{dt} \cdot \underline{dl} + \underline{u} \cdot d\underline{u} \right) = \oint_{C(t)} \frac{d\underline{u}}{dt} \cdot \underline{dl} + \oint_{C(t)} d \left(\frac{1}{2} \underline{u}^2 \right)$$

Puisque selon l'hypothèse **H1** le contour est fermé et ne coupe aucune discontinuité, la dernière intégrale est nulle. Il reste :

$$(12.5.6) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C(t)} \frac{d\underline{u}}{dt} \cdot \underline{dl}$$

Conformément aux hypothèses **H2** et **H3**, on peut remplacer la dérivée matérielle dans le second membre de cette équation par le second membre de l'équation de la dynamique sous sa forme (12.1.1) (Euler) :

$$(12.5.7) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C(t)} \left(- \underline{\text{grad}} \phi - \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p \right) \cdot \underline{dl}$$

On fait alors appel à la **formule de Stokes** que l'on applique aux deux termes de l'intégrale ci-dessus. Pour le premier terme cela donne :

$$(12.5.8) \quad \oint_{C(t)} \underline{\text{grad}} \phi \cdot \underline{dl} = \iint_{S(t)} \underbrace{\underline{\text{rot}}(\underline{\text{grad}} \phi)}_{=0} \cdot \underline{n} dS = 0$$

Pour le deuxième terme de (12.5.7), on doit calculer, toujours selon la formule de Stokes :

$$(12.5.9) \quad \oint_{C(t)} -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p \cdot \underline{dl} = \iint_{S(t)} \underline{\text{rot}} \left(-\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p \right) \cdot \underline{n} dS$$

En appliquant la relation vectorielle (cf. annexe A2.4) déjà utilisée en (4.5.20) :

$$(12.5.10) \quad \underline{\text{rot}}(a \underline{A}) = a \underline{\text{rot}} \underline{A} + \underline{\text{grad}}(a) \wedge \underline{A},$$

avec $a = 1/\rho$ et $\underline{A} = \underline{\text{grad}} p$, on obtient :

$$(12.5.11) \quad \underline{\text{rot}} \left(-\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p \right) = \frac{1}{\rho^2} \underline{\text{grad}} \rho \wedge \underline{\text{grad}} p$$

La relation (12.5.9) devient donc :

$$(12.5.12) \quad \oint_{C(t)} -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p \cdot \underline{dl} = \iint_{S(t)} \left(\frac{1}{\rho^2} \underline{\text{grad}} \rho \wedge \underline{\text{grad}} p \right) \cdot \underline{n} dS$$

Donc en définitive :

$$(12.5.13) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \iint_{S(t)} \left(\frac{1}{\rho^2} \underline{\text{grad}} \rho \wedge \underline{\text{grad}} p \right) \cdot \underline{n} dS = 0$$

Le vecteur $(\underline{\text{grad}} \rho \wedge \underline{\text{grad}} p) / \rho^2$ porte le nom de **vecteur barocline**. Ce vecteur s'annule dans la mesure où le fluide est **barotrope** conformément à l'hypothèse **H4** ci-dessus. Dans ce cas la circulation du fluide se conserve au cours de son mouvement. C'est le théorème de Kelvin, cf. (12.5.1).

La phénoménologie de la production de circulation qui résulte d'une situation non barotrope, donc barocline pour laquelle les surfaces isopycnes ($\rho = \text{const.}$) ne sont pas parallèles aux surfaces isobares ($p = \text{const.}$) a été expliquée au **chapitre 4** dans le paragraphe **4.5** consacré à la statique des fluides, cf. figure **4.7**. Ce mécanisme n'existe pas pour un fluide barotrope. Dans ces conditions, et en l'absence de tout effort tangentiel de nature visqueuse due à l'hypothèse du fluide parfait, il n'y a donc plus aucune possibilité de faire varier la circulation. D'où le théorème de Kelvin.

➤ Le théorème de Lagrange

Ce théorème est un corollaire du précédent : puisque dans un fluide parfait barotrope où les forces de volume dérivent d'un potentiel la circulation de la vitesse le long de tout contour matériel ne traversant pas de discontinuité se conserve, si elle est nulle à un instant, elle l'est donc à tout instant. Comme cette circulation est aussi égale au flux de la vorticité $\underline{\omega} = \underline{\text{rot}} \underline{u}$ à travers toute surface s'appuyant sur ce contour, cf. (12.5.2) et figure **2.24**, le rotationnel est donc nul dans tout l'écoulement. L'écoulement est donc irrotationnel.

Théorème de Lagrange -

Si l'écoulement d'un **fluide parfait barotrope** soumis à **des forces dérivant d'un potentiel** est **irrotationnel** à un instant donné, alors il le demeure à tout instant ultérieur.

Voilà donc le théorème annoncé plus haut qui prouve qu'un **écoulement de fluide parfait barotrope qui est irrotationnel à un instant donné, le reste.**

➤ Applications du théorème de Lagrange : un exemple

Le théorème de Kelvin et le théorème de Lagrange qui en découle sont d'une grande portée pratique. Pour apprécier cela, il est important de noter que comme stipulé à propos de (12.5.1) et (12.5.2), le théorème de Kelvin nécessite seulement que le contour matériel considéré sur lequel on calcule la circulation soit transporté par un fluide parfait barotrope ; il n'est donc pas nécessaire que **tout** l'écoulement vérifie cette propriété. L'écoulement en dehors du contour matériel peut donc ne pas être celui d'un fluide parfait, et peut donc contenir notamment des régions visqueuses. Cela étend donc l'applicabilité de ces deux théorèmes à des situations réelles.

On illustre cela sur la figure 12.4 ci-dessous. Il s'agit d'un écoulement uniforme impactant un objet bidimensionnel. Comme schématisé, tout contour matériel qui ne pénètre jamais dans les régions visqueuses de l'objet conserve sa circulation. La circulation étant nulle à l'amont puisque l'écoulement est uniforme, elle demeure nulle à tout instant, et cela quel que soit le contour considéré. On peut donc affirmer que **toutes les régions de fluide parfait de cet écoulement sont irrotationnelles**.

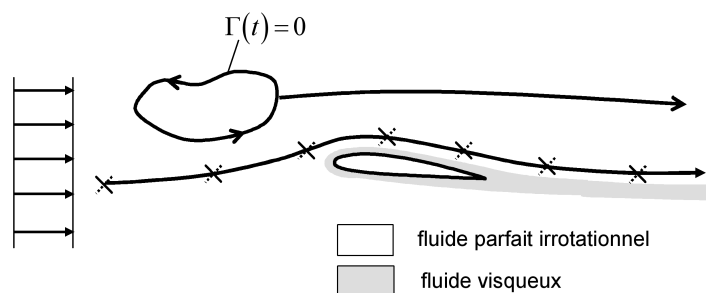


Figure 12.4 - Conservation d'une circulation nulle dans les régions de fluide parfait d'un écoulement uniforme impactant un objet bidimensionnel (théorème de Lagrange).

Le raisonnement sur la portance d'une aile mené au chapitre précédent à propos de la figure 11.8 peut être alors enrichi par celui effectué à propos de la figure 12.4 ci-dessus : l'écoulement de fluide parfait autour de l'aile qui engendre sa portance en créant un différentiel de pression entre l'extrados et l'intrados est irrotationnel si le profil de la vitesse est uniforme à l'infini amont. Le fait que l'écoulement soit irrotationnel signifie que les « particules de fluide » ne tournent pas autour de leur centre d'inertie. Nous avons schématisé cela sur la figure 12.4 au moyen d'une croix qui représente deux vecteurs matériels orthogonaux. Le fait que l'écoulement soit irrotationnel se traduit alors par la conservation de l'**orientation** de ces petits segments le long des lignes de courant.

Remarque -

Contrairement à ce que pourrait laisser penser cette manière simplifiée de représenter les choses, seule l'**orientation** de ces vecteurs matériels est conservée. Leur longueur change sous l'effet de la déformation irrotationnelle que traduit le tenseur des taux de déformation de l'écoulement. Cela a été expliqué en détail plus haut, cf. figure 12.2 (c).

➤ **Approfondissement * - Application du théorème de Lagrange : deux autres exemples**

Un deuxième exemple qui illustre le théorème de Lagrange est représenté sur la figure 12.5 ci-dessous. On considère maintenant un écoulement initialement au repos dans lequel un profil d'aile est mis en mouvement de manière impulsive. Puisque l'écoulement est au repos à l'instant initial, d'après le théorème de Lagrange la circulation sur tout contour matériel qui ne coupe ni l'aile ni son sillage visqueux est nulle et le demeure à tout instant. Comme schématisé, cela laisse une possibilité à l'existence d'une circulation localement non nulle sur un contour **intérieur** à ce premier contour matériel si l'une des branches des deux contours ainsi obtenus coupe la nappe visqueuse de l'aile. Cela montre que la mise en mouvement d'un objet dans un fluide peut créer des régions où le fluide est rotationnel. La couche limite du profil et son sillage sont effectivement des écoulements rotationnels dont l'origine provient de l'adhérence du fluide sur l'aile. Le cas présenté sur la figure 12.5 reproduit alors les observations expérimentales. Elles montrent, qu'en effet, la mise en mouvement d'un objet asymétrique tel qu'une aile inclinée par rapport à la direction de ce mouvement crée un tourbillon de fluide. Ce tourbillon, appelé **tourbillon de démarrage**, est déposé dans le fluide par le déplacement impulsif de l'aile. Par application du théorème de Lagrange, on en déduit que l'écoulement autour de l'aile possède alors une circulation de même amplitude que celle de ce tourbillon, mais de signe opposé, de sorte que la circulation totale reste nulle conformément au théorème de Lagrange. Comme nous le verrons dans un approfondissement du prochain chapitre, cette circulation est à l'origine de la portance de l'aile en mouvement.

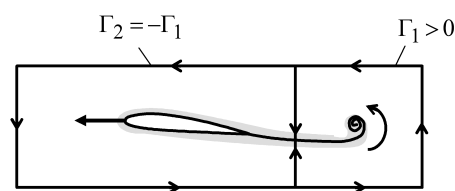


Figure 12.5 - Tourbillon de démarrage consécutif à la mise en mouvement impulsive d'une aile bidimensionnelle portante dans un écoulement au repos ; génération d'une circulation autour de l'aile. La circulation du fluide sur le contour qui ne coupe pas les régions visqueuses est nulle (théorème de Lagrange).

Enfin, un troisième et dernier exemple considéré sur la figure 12.6 est celui d'une aile réelle, donc d'envergure finie.

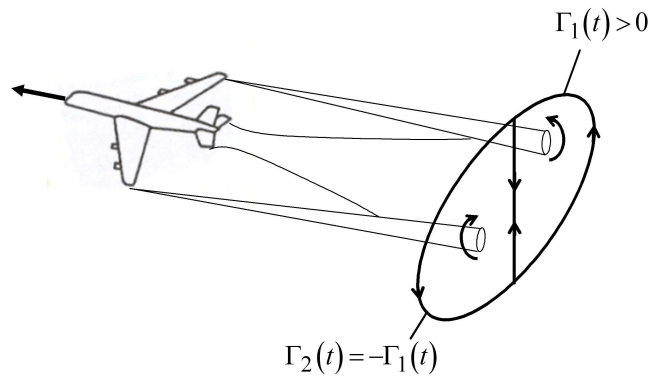


Figure 12.6 - Création de deux régions rotationnelles antisymétriques (tourbillons rotationnels visqueux) dans le sillage d'une aile d'envergure finie en translation uniforme. Ce schéma de principe peut être confronté à la photo de figure 2.29. La circulation du fluide le long d'un contour qui ne coupe pas ce sillage est nulle (théorème de Lagrange).

Si l'aile se déplace avec un mouvement de translation uniforme et si l'on considère un contour dans un plan normal à la direction d'avancement de cette aile suffisamment éloigné de l'objet pour être totalement plongé dans le fluide parfait, d'après le théorème de Lagrange la circulation le long d'un tel contour est nulle et doit le demeurer à tout instant tant que l'aile et ses régions visqueuses ne coupent pas le contour. Mais l'aile engendre un sillage visqueux, et les observations telles que celles reportées au **chapitre 2** sur les figures 2.27 à 2.29 montrent que compte tenu de la symétrie de ce problème ce sillage visqueux s'organise sous la forme de deux régions rotationnelles antisymétriques qui constituent deux tourbillons contrarotatifs. La circulation totale restant nulle, cet écoulement respecte également le théorème de Lagrange.

➤ Conclusion

De cet examen des propriétés du fluide parfait et de la vorticité, il faut retenir l'idée importante suivante : d'après le théorème de Lagrange, dans un écoulement de fluide parfait barotrope, tel qu'un écoulement homoentropique ou un écoulement de fluide parfait incompressible homogène, si l'écoulement est irrotationnel à un instant donné, il le demeure. C'est ce résultat fondamental que nous allons exploiter dans le chapitre suivant consacré aux écoulements irrotationnels.

12.6 Résumé des formules essentielles

➤ La relation de Crocco

✓ Hypothèses

Écoulement de fluide parfait avec force de volume dérivant d'un potentiel.

✓ Forme générale de la relation de Crocco, cf. (12.1.8)

$$(12.7.1) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underbrace{\underline{\omega} \wedge \underline{u}}_{\text{vecteur de Lamb}} = - \underbrace{\text{grad} \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\underline{u}^2}{2} + \phi \right)}_{\text{charge totale } H} + T \text{ grad } s$$

✓ Cas des écoulements de fluide parfait stationnaires, cf. (12.2.1)

$$(12.7.2) \quad \underline{\omega} \wedge \underline{u} = - \text{grad } H + T \text{ grad } s$$

Un écoulement stationnaire de fluide parfait homoentropique ($s = \text{const.}$) et homoénergétique ($H = \text{const.}$) est forcément irrotationnel ($\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u} = 0$).

✓ Cas des écoulements de fluide parfait barotrope, cf. (12.3.7)

$$(12.7.4) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge \underline{u} = - \text{grad} \left(\int \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{\underline{u}^2}{2} + \phi \right),$$

✓ Cas des écoulements stationnaires de fluide parfait incompressible homogène sans force de volume, cf. (12.4.1)

$$(12.7.5) \quad \underline{\omega} \wedge \underline{u} = - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\underline{u}^2}{2} \right)$$

➤ Les écoulements courbes irrotationnels

✓ Cas des écoulements stationnaires de fluide parfait incompressible homogène sans force de volume irrotationnels : l'exemple du tourbillon irrotationnel ponctuel isolé, cf. (12.4.10), (12.4.13), figure 12.3

$$(12.7.6) \quad u_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$(12.7.7) \quad \omega(r) = \Gamma \delta(r)$$

où Γ désigne la circulation du tourbillon et $\delta(r)$ une distribution de Dirac.

➤ Le théorème de Kelvin

✓ Hypothèses

Contour matériel $C(t)$ **fermé** entraîné par un **écoulement de fluide parfait** ne coupant aucune surface de discontinuité dans un fluide **barotrope** soumis à **des forces dérivant d'un potentiel**.

✓ Théorème de kelvin, cf. (12.5.1), (12.5.2)

$$(12.7.8) \quad \Gamma = \oint_{C(t)} \underline{u} \cdot d\underline{l} = \iint_{S(t)} \underline{\omega} \cdot \underline{n} dS = \text{const.}$$

où $S(t)$ désigne une surface quelconque s'appuyant sur le contour $C(t)$.

➤ Le théorème de Lagrange

Si l'écoulement d'un **fluide parfait barotrope** soumis à **des forces dérivant d'un potentiel** est **irrotationnel** à un instant, alors il l'est à tous les autres instants.

ANNEXES

A12.1 Démonstration de la décomposition de Lamb

On veut démontrer l'identité (12.1.4) :

$$(A12.1.1) \quad \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = \underline{\omega} \wedge \underline{u} + \underline{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} \underline{u}^2 \right)$$

En introduisant le tenseur de rotation $\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} - {}^t \nabla \underline{u})$, on peut écrire l'accélération convective sous la forme :

$$(A12.1.2) \quad \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = 2 \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{u} + {}^t \nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$$

Pour le premier terme du second membre de cette expression, on note que pour tout vecteur \underline{A} , on a :

$$(A12.1.3) \quad \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{A} = \underline{\Omega} \wedge \underline{A}$$

où $\underline{\Omega}$ définit le **vecteur de rotation**. Nous avons vu au **chapitre 2**, cf. (2.10.2) que le vecteur taux de rotation $\underline{\Omega}$ et le vecteur vortacité $\underline{\omega}$ sont reliés par :

$$(A12.1.4) \quad \underline{\Omega} = \frac{1}{2} \underline{\text{rot}} \underline{u} = \frac{1}{2} \underline{\omega}$$

On obtient donc le premier terme du second membre de l'identité (A12.1.1) :

$$(A12.1.5) \quad 2 \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{u} = \underline{\omega} \wedge \underline{u}$$

Si l'on se limite pour simplifier au cas d'un système de coordonnées cartésiennes, le second terme du second membre de (A12.1.2) vérifie quant à lui :

$$(A12.1.6) \quad \begin{aligned} \left({}^t \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \right)_i &= \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_j \right) \cdot u_l \underline{e}_l \right] \cdot \underline{e}_i = \left[u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \left(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_j \right) \cdot \underline{e}_l \right] \cdot \underline{e}_i \\ &= \left[u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \underline{e}_k \delta_{jl} \right] \cdot \underline{e}_i = u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \delta_{jl} \delta_{ki} = u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \underline{u}^2 \right) \\ &= \left[\underline{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} \underline{u}^2 \right) \right]_i \end{aligned}$$

Donc :

$$(A12.1.7) \quad {}^t\nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = \underline{grad} \left(\frac{1}{2} \underline{u}^2 \right)$$

Cela complète la démonstration.

A12.2 Dérivée d'une intégrale linéique matérielle : démonstration

On veut démontrer la relation (12.5.3) :

$$(A12.2.1) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C(t)} \frac{d}{dt} (\underline{u} \cdot \underline{dl}) = \oint_{C(t)} \left[\frac{d\underline{u}}{dt} \cdot \underline{dl} + \underline{u} \cdot \frac{d(\underline{dl})}{dt} \right]$$

Soit l'intégrale :

$$(A12.2.2) \quad \Gamma(t) = \oint_{C(t)} \underline{u}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dl}(\underline{X}, t).$$

Exprimée dans le jeu des variables lagrangiennes (\underline{X}, t) , la dérivée temporelle de cette quantité vaut :

$$(A12.2.3) \quad \frac{d}{dt} \Gamma(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [\Gamma(t + \delta t) - \Gamma(t)],$$

avec :

$$(A12.2.4) \quad \Gamma(t + \delta t) = \oint_{C(t+\delta t)} \underline{u}(\underline{X}, t + \delta t) \cdot \underline{dl}(\underline{X}, t + \delta t)$$

Pour les deux quantités qui interviennent dans cette dernière intégrale, on peut écrire :

$$(A12.2.5) \quad \underline{u}(\underline{X}, t + \delta t) = \underline{u}(\underline{X}, t) + \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}(\underline{X}, t) \delta t + \dots$$

$$(A12.2.6) \quad d\mathbf{l}(\mathbf{X}, t + \delta t) = d\mathbf{l}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial d\mathbf{l}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \delta t + \dots$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Gamma(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \{ \oint_{C(t)} [\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \delta t + \dots] \cdot [d\mathbf{l}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial d\mathbf{l}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \delta t + \dots] \\ - \oint_{C(t)} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{l}(\mathbf{X}, t) \} \end{aligned}$$

En négligeant les termes d'ordre deux en δt , on obtient :

$$(A12.2.7) \quad \frac{d}{dt} \Gamma(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \{ \oint_{C(t)} [\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot \frac{\partial d\mathbf{l}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{l}(\mathbf{X}, t) + \dots] \delta t \}$$

En revenant aux variables eulériennes (\mathbf{x}, t) , on a pour la vitesse et pour la déformation linéique de l'élément de contour $d\mathbf{l}$ qui interviennent ci-dessus :

$$(A12.2.8) \quad \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u} \\ \frac{\partial d\mathbf{l}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \frac{d(d\mathbf{l})}{dt} \end{cases}$$

Donc :

$$(A12.2.9) \quad \frac{d}{dt} \Gamma(t) = \oint_{C(t)} [\mathbf{u} \cdot \frac{d(d\mathbf{l})}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \dots],$$

ce qui démontre la proposition.

Chapitre 13

Les écoulements potentiels



Chapitre 13. Les écoulements potentiels.....	454
13.1 Le deuxième théorème de Bernoulli	454
13.2 Les écoulements potentiels.....	456
13.3 Le cas des écoulements potentiels bidimensionnels	459
13.4 Catalogue de solutions élémentaires et principe de superposition.....	461
Écoulement uniforme.....	462
Source et puits	462
Tourbillon ponctuel	463
13.5 Principe de superposition	463
Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source (le bord d'attaque d'une plaque plane)	464
Superposition d'une source et d'un puits : dipôle	466
Superposition d'un dipôle et d'un écoulement uniforme : l'écoulement acyclique autour d'un cylindre	468
Ajout d'un tourbillon : l'écoulement cyclique autour d'un cylindre	469
13.6 Effort engendré par l'écoulement potentiel acyclique autour du cylindre.....	471
Généralités	471
Application à l'écoulement potentiel autour du cylindre	472
Confrontation à l'expérience et interprétation.....	475
Traînée de pression, traînée visqueuse.....	476
13.7 Effort engendré par l'écoulement potentiel cyclique autour du cylindre.....	478
Conclusion	481
Application : exemples	481
13.8 Le paradoxe de d'Alembert.....	482
Formulation générale.....	482
Ecoulement acyclique en géométrie bidimensionnelle	483
Ecoulement en géométrie tridimensionnelle.....	484
Ecoulement cyclique en géométrie bidimensionnelle	484
13.9 Résumé des formules essentielles	486

Chapitre 13. Les écoulements potentiels

13.1 Le deuxième théorème de Bernoulli

Comme nous l'avons vu dans le **chapitre 11**, le premier théorème de Bernoulli est basé sur la définition de l'existence d'un invariant matériel homogène à une énergie dans un cadre d'hypothèses donné. Dans un écoulement **permanent** de fluide parfait, cet invariant matériel est la charge totale H . Mais il existe une autre version de ce théorème, le **deuxième théorème de Bernoulli**, qui, lui, s'applique aux écoulements **instationnaires** de fluide parfait dans la mesure où ces écoulements sont **irrotationnels**. Comme nous allons le voir, ce théorème mène à la définition d'un **invariant général** qui ne se limite pas à une ligne de courant mais qui caractérise **tout** l'écoulement.

Le **deuxième théorème de Bernoulli** s'établit à partir de la relation de Crocco pour un écoulement de fluide **barotrope**, cf. (12.3.7) :

$$(13.1.1) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge \underline{u} = -\underline{grad} \left(\int \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{\underline{u}^2}{2} + \phi \right)$$

Comme nous l'avons vu, c'est une forme particulière de l'équation de la dynamique valable pour un écoulement de fluide parfait barotrope où les forces volumiques dérivent d'un potentiel.

Remarque -

Rappelons aussi que les écoulements de fluide barotrope recouvrent notamment le cas des écoulements de **fluide parfait incompressible homogène**, pour lesquels $\rho = \text{const.}$, le cas d'un **gaz thermiquement parfait isotherme**, tel que $T = \text{const.}$, et le cas d'un **gaz thermiquement et calorifiquement parfait homoentropique**, tel que $p = \text{const.} \times \rho^\gamma$.

Si l'écoulement est **permanent**, en contractant cette équation avec la vitesse, on obtient le premier théorème de Bernoulli (11.2.6) qui stipule que la charge totale H , ici celle d'un fluide barotrope, se conserve le long des lignes de courant de l'écoulement. La constante peut varier d'une ligne de courant à l'autre.

Remarque -

Rappelons que comme vu au paragraphe 11.2 du **chapitre 11**, le premier théorème de Bernoulli ne se limite pas au fluide barotrope. Il est valable pour tout type d'écoulement permanent de fluide parfait.

Supposons maintenant que l'écoulement ne soit pas stationnaire, mais qu'il soit **irrotationnel**, donc tel que :

$$(13.1.2) \quad \underline{\omega} = \text{rot } \underline{u} = 0 \quad - \text{ écoulement irrotationnel}$$

Cela implique alors l'existence d'un **potentiel des vitesses** φ , tel que :

$$(13.1.3) \quad \underline{u} = \underline{\text{grad}} \varphi$$

Les écoulements irrotationnels sont appelés, de ce fait, **écoulements à potentiel**.

Dans ces conditions, la dérivée partielle par rapport au temps dans l'équation (13.1.1) prend la forme d'un gradient :

$$(13.1.4) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \underline{\text{grad}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

La dérivée temporelle du potentiel peut ainsi venir s'ajouter à la charge totale. Puisque dans un écoulement irrotationnel $\underline{\omega} \wedge \underline{u} = 0$, on obtient alors pour (13.1.1) :

$$(13.1.5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{u^2}{2} + \phi = C(t)$$

La constante $C(t)$ est **identique dans tout l'écoulement** : comme annoncé, on fait apparaître ainsi un invariant général qui caractérise l'ensemble de l'écoulement.

Le deuxième théorème de Bernoulli s'énonce donc comme suit :

Deuxième théorème de Bernoulli -

Dans un écoulement de **fluide parfait irrotationnel** et **barotrope** dans lequel **les forces de volume dérivent d'un potentiel**, on a :

$$(13.1.6) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \phi = C(t)$$

où ϕ est le potentiel des vitesses tel que $\underline{u} = \underline{\text{grad}} \phi$. La constante $C(t)$ est identique dans tout l'écoulement.

Une remarque doit être faite à propos de ce théorème : la constante $C(t)$ peut être éliminée dans (13.1.6) en l'incluant dans la définition du potentiel des vitesses ϕ . En effet, celui-ci est défini à une constante dépendante du temps près. En posant :

$$(13.1.7) \quad \phi' = \phi - \int C(t) dt ,$$

on a toujours :

$$(13.1.8) \quad \underline{\text{grad}} \phi' = \underline{\text{grad}} \phi = \underline{u} ,$$

La relation (13.1.6) peut donc aussi s'écrire sous la forme :

$$(13.1.9) \quad \boxed{\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \phi = 0}$$

13.2 Les écoulements potentiels

Si l'on se cantonne aux aspects mathématiques de la mécanique des fluides, l'intérêt de l'hypothèse des écoulements irrotationnels est qu'elle supprime la non-linéarité de l'équation de la dynamique attachée au terme $\underline{\omega} \wedge \underline{u}$ issu de la décomposition de Lamb (12.1.4). Le problème ne devient pas pour autant linéaire puisque l'on conserve le terme $\underline{\text{grad}}(\underline{u}^2/2)$ issu de cette décomposition. Mais ce terme est pris en compte dans une équation de

conservation autonome qui est (13.1.6). La loi de la dynamique se résume alors à cette équation. La seule équation restante, dans laquelle intervient la variation spatiale du champ de vitesse, est l'équation de continuité. L'équation de continuité fournit donc la seconde équation différentielle pour le potentiel φ dont nous avons besoin pour résoudre le problème. Examinons cela.

➤ Continuité

En remplaçant \underline{u} par son expression (13.1.3) dans l'équation de continuité générale (3.3.7) on obtient dans un repère de coordonnées cartésiennes :

$$(13.2.1) \quad \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z}}_{d\rho/dt = \partial \rho / \partial t + \underline{\text{grad}} \varphi \cdot \underline{\text{grad}} \rho} + \rho \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)}_{\text{div } \underline{u} = \text{div } \underline{\text{grad}} \varphi = \Delta \varphi} = 0$$

Cette équation doit être résolue avec (13.1.6) et un jeu de conditions initiales et de conditions aux limites idoïne.

➤ Cas du fluide compressible

Pour les écoulements à masse volumique variable, l'équation de continuité (13.2.1) ne présente pas d'avantage décisif car elle reste non-linéaire du fait de la présence du produit de gradients $\underline{\text{grad}} \varphi \cdot \underline{\text{grad}} \rho$. Dans le domaine de la dynamique des gaz où l'on traite souvent de situations d'écoulements compressibles, des méthodes approchées ont été développées pour résoudre cette équation dans le cas où la variation de la vitesse, donc celle des dérivées du potentiel φ , peut être considérée comme une petite perturbation par rapport à un écoulement uniforme. Cette méthode, appelée **méthode du potentiel linéarisé compressible**, s'appuie alors sur une version linéarisée des équations (13.2.1) et (13.1.6). Elle ne sera pas développée dans ce cours.

➤ Fluide incompressible homogène

Dans le cas où le fluide peut être considéré comme **incompressible**, tel que $d\rho/dt = -\rho \text{div } \underline{u} = 0$, conformément à (13.2.1) le potentiel devient une solution de l'équation de Laplace :

$$(13.2.3) \quad \operatorname{div} \underline{u} = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Cette équation est **linéaire**. Les hypothèses d'irrotationnalité et d'incompressibilité permettent donc de remplacer le problème différentiel **non-linéaire** des équations d'Euler par un problème plus simple, linéaire, consistant à résoudre l'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses :

$$(13.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi(\underline{x}, t) = 0 \\ \text{conditions initiales} \\ \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

On a donc dans ce cas ramené la résolution de l'écoulement à celui d'un problème linéaire, celui décrit par (13.2.4). Il s'agit d'une simplification considérable.

Si l'on ajoute à cela l'hypothèse que le fluide est non seulement incompressible mais aussi **homogène**, tel que $\rho = \text{const.}$, alors le terme $\int dp/\rho(p)$ de l'équation (13.1.9) vaut $p/\rho + \text{const.}$. Le deuxième théorème de Bernoulli (13.1.6) devient :

$$(13.2.5) \quad \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \phi = C(t)}$$

La résolution de l'équation de Laplace (13.2.4) fournit le potentiel φ , d'où l'on déduit la vitesse $\underline{u} = \underline{\operatorname{grad}} \varphi$. La pression est alors obtenue au moyen de la relation (13.2.5).

➤ Écoulements potentiels : définition

Les écoulements irrotationnels de fluide parfait incompressible homogène soumis à des forces volumiques dérivant d'un potentiel, donc décrits par les équations (13.2.4) et (13.2.5), sont appelés **écoulements potentiels**.

Ecoulement potentiel -

Un écoulement potentiel est un écoulement irrotationnel de fluide parfait incompressible homogène soumis à des forces volumiques conservatives.

C'est le caractère linéaire de l'équation (13.2.4) qui fait tout l'intérêt des écoulements potentiels. L'une des conséquences de cette linéarité est qu'il devient possible de construire un écoulement de ce type au moyen d'une **superposition d'écoulements élémentaires**, solutions de l'équation de Laplace. On peut faire cela avec une précision qui augmente avec le nombre de solutions élémentaires de cette somme. C'est le **principe de superposition**. Nous allons nous exercer plus loin à cette méthode.

13.3 Le cas des écoulements potentiels bidimensionnels

Pour explorer les écoulements vérifiant (13.2.4), nous allons nous cantonner au cas des **écoulements bidimensionnels**. On considèrera le cas des coordonnées cartésiennes et celui des coordonnées polaires.

Dans un système de coordonnées cartésiennes, ces écoulements sont caractérisés par le champ des vitesses, cf. (2.11.1) :

$$(13.3.1) \quad \underline{u} = u_1(x_1, x_2, t) \underline{e}_1 + u_2(x_1, x_2, t) \underline{e}_2,$$

où l'on peut ajouter une vitesse de translation uniforme selon \underline{e}_3 . En coordonnées polaires, on a, cf. (A2.1.2) :

$$(13.3.2) \quad \underline{u} = u_r(r, \theta, t) \underline{e}_r + u_\theta(r, \theta, t) \underline{e}_\theta,$$

où l'on peut également ajouter une vitesse de translation uniforme selon \underline{e}_1 .

➤ **Potentiel des vitesses et fonction de courant**

L'irrotationnalité implique l'existence du potentiel $\varphi(x_1, x_2, t)$, cf. (13.1.3), tel que :

$$(13.3.3) \quad \underline{u}(x_1, x_2, t) = \underline{grad} \varphi(x_1, x_2, t)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, cela donne :

$$(13.3.4) \quad \boxed{u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}$$

Dans un système de coordonnées cylindriques, on a :

$$(13.3.5) \quad \boxed{u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}}$$

Par ailleurs, nous avons vu au **chapitre 2** que les lignes de courant d'un écoulement bidimensionnel incompressible correspondent aussi aux lignes isovaleurs de la fonction de courant $\psi(x_1, x_2, t)$. Dans un repère cartésien on a, cf. (2.12.13) :

$$(13.3.6) \quad \boxed{u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}}$$

En coordonnées cylindriques, on a, cf. (A2.1.41) :

$$(13.3.7) \quad \boxed{u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}}$$

Les lignes équipotentiels $\varphi = \text{const.}$ et les lignes de courant $\psi = \text{const.}$ forment alors **deux réseaux de courbes qui se coupent à angle droit** en chaque point de l'écoulement.

Démonstration -

En coordonnées cartésiennes par exemple, en tout point de l'écoulement on a en effet $\underline{grad} \varphi \cdot \underline{grad} \psi = -u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0$.

✓ Chaque fonction φ et ψ vérifie par ailleurs l'équation de Laplace. Pour le potentiel φ , c'est l'**incompressibilité** qui assure cette propriété, cf. (13.2.3). Pour la fonction de courant ψ , c'est l'**irrotationnalité** qui mène à l'équation de Laplace. En effet, si l'on raisonne par exemple avec des coordonnées cartésiennes, compte tenu de (13.3.6) :

$$(13.3.6) \quad \underline{rot}(\underline{u}) \cdot \underline{e}_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = -\Delta \psi = 0$$

On peut donc aussi écrire :

$$(13.3.7) \quad \Delta \psi = -\omega = 0$$

13.4 Catalogue de solutions élémentaires et principe de superposition

Nous présentons maintenant les trois principales solutions élémentaires qui permettent de construire des écoulements potentiels simples. Ces solutions sont illustrées sur la figure 13.1.

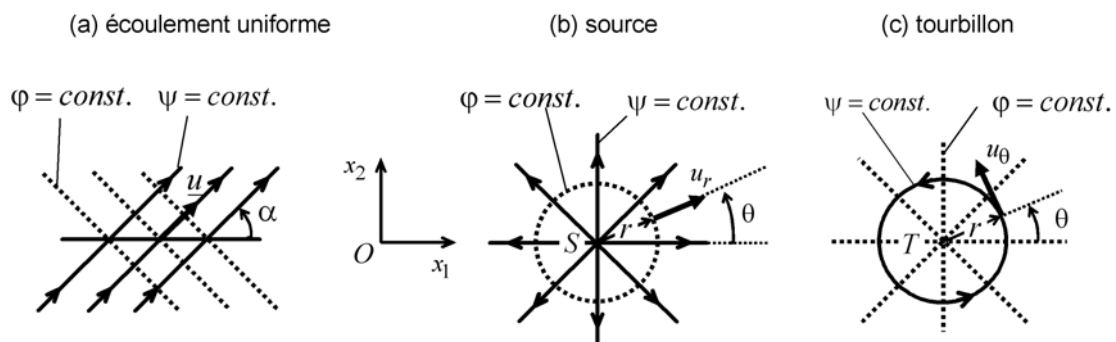


Figure 13.1 - Trois solutions élémentaires d'écoulements potentiels.

Nous allons analyser tour à tour chacune de ces trois solutions.

➤ Écoulement uniforme

Soit un **écoulement uniforme** de vitesse $\underline{u} = U_0 \cos \alpha \underline{e}_1 + U_0 \sin \alpha \underline{e}_2$. Ce cas correspond à la figure **13.1 (a)** ci-dessus. Conformément à **(13.3.4)** et **(13.3.6)**, on a :

$$(13.4.1) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = U_0 \cos \alpha \\ u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = U_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Pour le potentiel des vitesses et la fonction de courant cela donne par intégration :

$$(13.4.2) \quad \boxed{\begin{cases} \varphi = U_0 (\cos \alpha x_1 + \sin \alpha x_2) + const. \\ \psi = U_0 (-\sin \alpha x_1 + \cos \alpha x_2) + const. \end{cases}}$$

➤ Source et puits

La **source** ou le **puits** correspondent à des écoulements qui s'effectuent à partir d'un point S (source) ou qui se dirigent vers ce point (puits). Le cas de la source est schématisé sur la figure **13.1 (b)**. Dans un système de coordonnées polaires (S, r, θ) attaché au point source S , conformément à **(13.3.5)** et **(13.3.7)** le champ de vitesse de cet écoulement est :

$$(13.4.3) \quad \begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r} \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

où $Q = \oint_C \underline{u} \cdot \underline{n} dl = 2\pi r u_r$, tel que $Q > 0$, est le débit volumique. On en déduit que :

$$(13.4.4) \quad \boxed{\begin{cases} \varphi = \frac{Q}{2\pi} \log r + const. \\ \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta + const. \end{cases}}$$

Le cas d'un puits revient à changer Q par $-Q$ dans ces relations.

➤ Tourbillon ponctuel

Le **tourbillon ponctuel** correspond à un écoulement irrotationnel qui circule autour d'un point en effectuant des cercles. Ce cas, schématisé sur la figure **13.1 (c)**, a été étudié au paragraphe **12.4** du chapitre précédent, cf. figure **12.3**. On sait que son champ de vitesse est défini par la relation **(12.4.10)**. Dans un système de coordonnées polaires (T, r, θ) attaché au point tourbillon T , on a :

$$(13.4.5) \quad \begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

où Γ désigne la circulation $\Gamma = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{l} = 2\pi r u_\theta$. Pour le potentiel des vitesses et la fonction de courant, cela donne :

$$(13.4.6) \quad \boxed{\begin{cases} \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + \text{const.} \\ \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r + \text{const.} \end{cases}}$$

Remarque -

On note que les écoulements décrits par les relations **(13.4.3)** et **(13.4.5)** sont indéterminés au point origine du repère : en ce point la vitesse tend vers l'infini. Comme expliqué au paragraphe **12.4**, dans le cas du tourbillon ponctuel, ce comportement singulier se traduit par une distribution de Dirac du rotationnel, cf. figure **12.3 (c)**. Ainsi, l'écoulement est bien irrotationnel (comme l'exigent les hypothèses d'un écoulement potentiel) sauf à l'origine. Ces écoulements constituent des **singularités potentielles**.

13.5 Principe de superposition

Nous illustrons maintenant les aspects pratiques du **principe de superposition** des solutions élémentaires présentées ci-dessus.

➤ **Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source (le bord d'attaque d'une plaque plane)**

Un premier exemple proposé est celui de la combinaison d'une source et d'un écoulement uniforme. On considère que l'écoulement uniforme s'effectue selon l'axe Ox_1 . Pour construire les lignes de courant d'un tel écoulement, on considère donc l'expression de la fonction de courant ψ de l'écoulement uniforme donnée par la formule (13.4.2) dans laquelle on pose $\alpha = 0$, et on lui additionne celle d'une source placée à l'origine du repère, qui est donnée en (13.4.4). Soit :

$$(13.5.1) \quad \psi = \psi_{\text{écoul}^t \text{ uniforme}} + \psi_{\text{source}} = U_0 x_2 + \frac{Q}{2\pi} \theta + \text{const.}$$

avec $\theta = \arctg(x_2/x_1)$. La constante nous rappelle que les fonctions de courant, comme le potentiel des vitesses, sont des fonctions définies à une constante arbitraire près.

Le résultat est montré sur la figure 13.2. On voit que le débit de la source est entièrement canalisé vers l'aval par deux lignes de courant formant une ligne séparatrice BAC . Ces deux lignes de courant tendent à devenir parallèles à l'axe Ox_1 loin à l'aval. On introduit alors la longueur h qui caractérise la demi-séparation de ces lignes de courant qui canalisent le débit Q à la vitesse U_0 loin à l'aval. Cette échelle est donc définie par :

$$(13.5.2) \quad Q = U_0 2h$$

D'où :

$$(13.5.3) \quad \frac{\psi}{Q} = \left(\frac{x_2}{2h} + \frac{\theta}{2\pi} \right) + \text{const.}$$

Par commodité, on choisit $\text{const.} = -1/2$ de telle sorte que la ligne de courant qui coïncide avec l'axe Ox_1 à l'infini amont (telle que $\theta = \pi$) corresponde à la valeur $\psi = 0$. Comme montré sur la figure 13.2, la construction du réseau des lignes de courant s'effectue alors en reliant les points d'intersection entre les droites parallèles et les rayons pour lesquels on obtient la même valeur de ψ/Q (cette valeur est indiquée à droite du graphe).

La ligne de courant $\psi = 0$ comprend l'axe Ox_1 privé de l'origine et la courbe BAC d'équation :

$$(13.5.4) \quad \boxed{\frac{x_2}{2h} + \frac{\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} = 0}$$

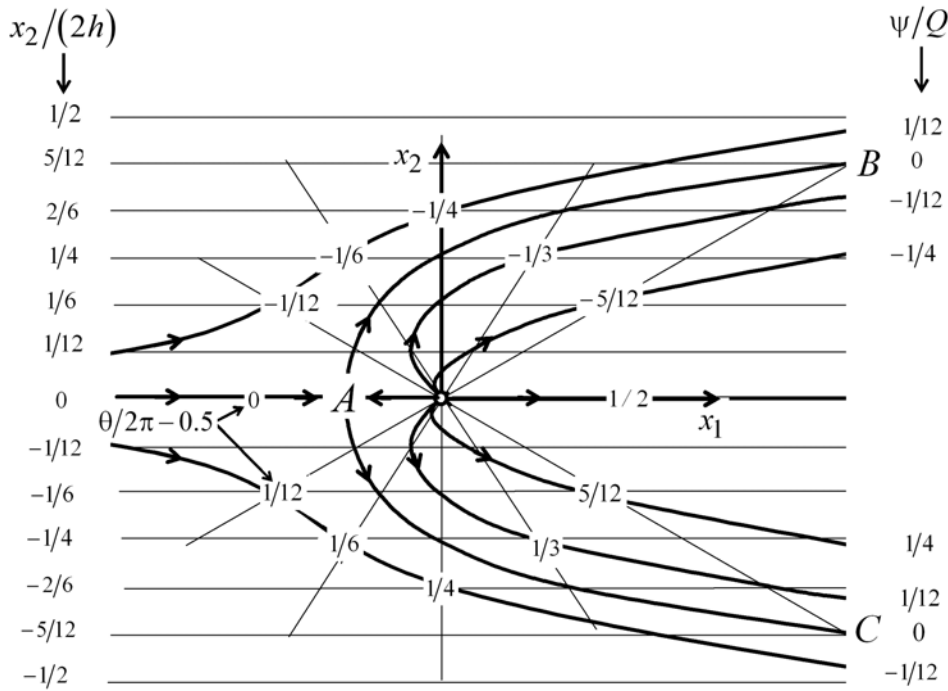


Figure 13.2 - Construction du réseau de lignes de courant d'un écoulement correspondant à la superposition d'une source et d'un écoulement uniforme (source : R. Ouziaux & J. Perrier, « Mécanique des fluides appliquée », Dunod 1978).

La longueur du segment BC tend vers $2h$ à l'infini aval (pour $\theta \rightarrow 0$). Enfin, le point d'arrêt A est déterminé par l'annulation de la vitesse. En dérivant (13.5.3) avec $\theta = \arctg(x_2/x_1)$, on trouve pour la composante selon Ox_1 de la vitesse :

$$(13.5.5) \quad u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = Q \left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{2\pi x_1} \frac{1}{\sqrt{1 - (x_2/x_1)^2}} \right).$$

Donc sur l'axe Ox_1 , $x_2 = 0$, $u_1 = 0$ impliquent :

$$(13.5.6) \quad \frac{x_1}{2h}(A) = -\frac{1}{2\pi}$$

On peut remplacer n'importe quelle ligne de courant par la surface d'un solide sans que cela ne modifie l'écoulement à l'extérieur de ce solide. En particulier, la courbe BAC de la figure **13.2** représente la ligne de courant d'un écoulement potentiel autour du bord d'attaque d'une plaque plane. Ainsi, si l'on désire introduire une plaque plane d'épaisseur $2h$ dans un écoulement, on pourra utiliser cette méthode, c'est-à-dire l'équation **(13.5.4)**, pour définir et usiner ce bord d'attaque de sorte qu'il soit le plus « aérodynamique » possible au sens où, si l'on néglige les effets de la viscosité, la surface de l'objet devient une surface de courant d'un écoulement de fluide parfait incompressible irrotationnel. On obtient ainsi une forme « idéale », c.-à-d. la moins perturbative possible. C'est ainsi que l'on procède en pratique.

Remarque -

Notons que cela n'est vrai que si le nombre de Reynolds est grand (hypothèse du fluide parfait) et si le nombre de Mach reste faible (hypothèse du fluide incompressible).

➤ **Superposition d'une source et d'un puits : dipôle**

Le **dipôle** constitue une autre application du principe de superposition. Il s'agit de la superposition en un même point d'une source et d'un puits de débit $\pm Q$. Comme schématisé sur la figure **13.3 (a)** ci-dessous, on considère tout d'abord un **doublet** constitué d'une source située en un point S et d'un puits de même débit situé en un point P .

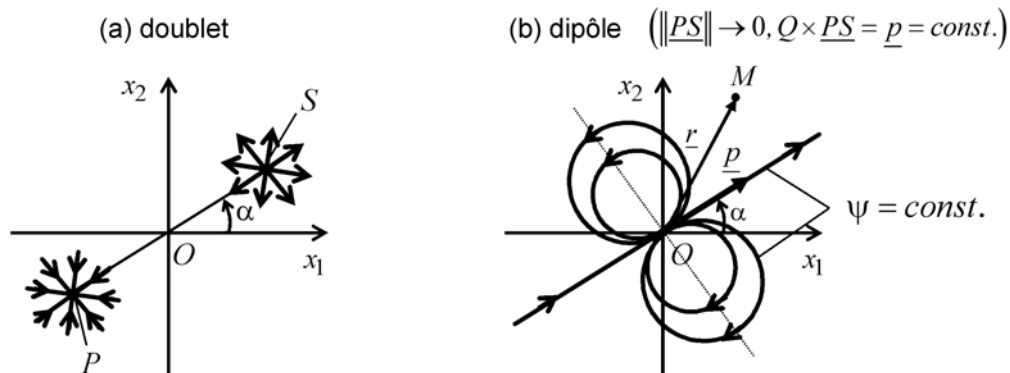


Figure 13.3 - Superposition d'une source et d'un puits : (a) le doublet, (b) le dipôle.

On raisonne ici à partir du potentiel des vitesses. Conformément à **(13.4.4)**, on peut écrire :

$$(13.5.7) \quad \varphi = \varphi_{\text{source}} + \varphi_{\text{puits}} = \frac{Q}{2\pi} (\log \| \underline{r} - \underline{OS} \| - \log \| \underline{r} - \underline{OP} \|)$$

Considérons alors la limite de cette expression lorsqu'on rapproche la source du puits, de sorte que $\| \underline{PS} \| \rightarrow 0$, tout en maintenant le produit $Q \times \underline{PS} = \underline{p}$ constant. Cela produit un dipôle de moment \underline{p} comme illustré sur la figure **13.3 (b)**. En effectuant un développement limité des logarithmes de **(13.5.7)** on obtient :

$$(13.5.8) \quad \boxed{\varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{\underline{SP} \cdot \underline{e}_r}{r} = -\frac{\underline{p} \cdot \underline{e}_r}{2\pi r} = -\frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{2\pi r^2}}$$

Démonstration -

On peut écrire $\log \| \underline{r} - \underline{OS} \| = \log \| r \underline{e}_r - (\underline{OS} \cdot \underline{e}_r) \underline{e}_r - (\underline{OS} \cdot \underline{e}_\theta) \underline{e}_\theta \| = \log r + \log \| (1 - \frac{\underline{OS} \cdot \underline{e}_r}{r}) \underline{e}_r - \frac{\underline{OS} \cdot \underline{e}_\theta}{r} \underline{e}_\theta \|$
 $= \log r + \frac{1}{2} \log [(1 - \frac{\underline{OS} \cdot \underline{e}_r}{r})^2 + (\frac{\underline{OS} \cdot \underline{e}_\theta}{r})^2] = \log r - \frac{\underline{OS} \cdot \underline{e}_r}{r} + O(\frac{\underline{OS} \cdot \underline{e}_r}{r})^2$. De la même façon, on obtiendra
 $\log \| \underline{r} - \underline{OP} \| = \log r - \frac{\underline{OP} \cdot \underline{e}_r}{r} + O(\frac{\underline{OP} \cdot \underline{e}_r}{r})^2$. Conformément à **(13.5.7)**, par soustraction, on obtient **(13.5.8)** à l'ordre dominant.

Pour le réseau de lignes de courant ψ perpendiculaire à celui de φ , on trouve :

$$(13.5.9) \quad \boxed{\psi = \frac{\underline{p} \wedge \underline{r}}{2\pi r^2} \cdot \underline{e}_3}$$

On en déduit le champ de vitesse en calculant les gradients de φ et de ψ selon r :

$$(13.5.10) \quad \boxed{\begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\underline{p} \cdot \underline{r}/r}{r} \right) = \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{2\pi r^3} \\ u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\underline{p} \wedge \underline{r}/r}{r} \right) = \frac{\underline{p} \wedge \underline{r}}{2\pi r^3} \end{cases}}$$

➤ **Superposition d'un dipôle et d'un écoulement uniforme : l'écoulement acyclique autour d'un cylindre**

Nous allons maintenant utiliser la solution correspondant au dipôle que nous venons d'établir pour étudier le cas d'un écoulement autour d'un cylindre. Pour cela, on considère l'écoulement stationnaire correspondant à la superposition d'un écoulement uniforme de vitesse horizontale $\underline{u} = U_0 \underline{e}_1$ et d'un écoulement de dipôle de moment vectoriel à contre-courant, tel que $\underline{p} = -p \underline{e}_1$. Cela est schématisé sur la figure 13.4 ci-dessous.

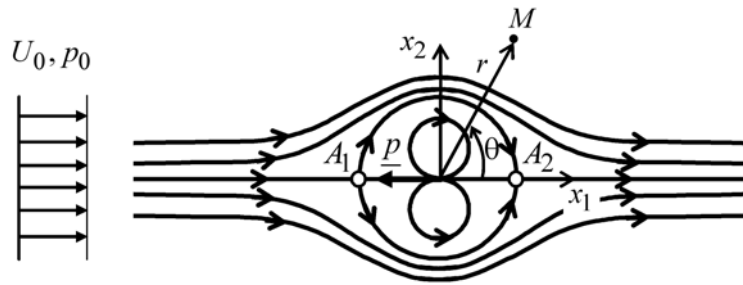


Figure 13.4 - Superposition d'un doublet et d'un écoulement uniforme : l'écoulement acyclique autour d'un cylindre.

On a :

$$(13.5.11) \quad \begin{cases} \varphi = \varphi_{\text{écoulement uniforme}} (\alpha=0) + \varphi_{\text{dipôle}} (\alpha=\pi) \\ \psi = \psi_{\text{écoulement uniforme}} (\alpha=0) + \psi_{\text{dipôle}} (\alpha=\pi) \end{cases}$$

Soit, d'après (13.4.2) et (13.5.8) :

$$(13.5.12) \quad \varphi = U_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{2\pi r} = \left(U_0 r + \frac{p}{2\pi r} \right) \cos \theta$$

Pour la fonction de courant, d'après (13.4.2) et (13.5.9), on obtient :

$$(13.5.13) \quad \psi = \left(U_0 r - \frac{p}{2\pi r} \right) \sin \theta$$

Si a désigne le rayon du cylindre, le cercle devient une ligne de courant particulière de cet écoulement si $\psi(r=a) = \text{const.}$. Si l'on choisit la valeur zéro pour cette constante, selon (13.5.13) le moment dipolaire p vaut :

$$(13.5.14) \quad p = 2\pi a^2 U_0$$

En remplaçant cette valeur dans (13.5.12) et (13.5.13) on obtient :

$$(13.5.15) \quad \begin{cases} \varphi = U_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) r \cos \theta \\ \psi = U_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) r \sin \theta \end{cases}$$

Les composantes u_r , u_θ de la vitesse valent :

$$(13.5.16) \quad \begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = U_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -U_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases}$$

Comme représenté sur la figure 13.4 l'écoulement est symétrique par rapport à l'axe Ox et il possède deux points s'arrêt, A_1 , A_2 , situés en $\theta = \pi$ et 0 . Sur les flancs du cylindre, c.-à-d. en $\theta = \pm \pi/2$, la vitesse a doublé : $\|\underline{u}\|(r=a, \theta = \pm \pi/2) = 2 U_0$.

➤ Ajout d'un tourbillon : l'écoulement cyclique autour d'un cylindre

Introduisons maintenant la troisième solution élémentaire présentée sur la figure 13.1, le tourbillon. Si l'on superpose à l'écoulement de cylindre ci-dessus un tourbillon au centre du cylindre, on a :

$$(13.5.17) \quad \begin{cases} \varphi = \varphi_{\text{écoulement de cylindre}} + \varphi_{\text{tourbillon}} \\ \psi = \psi_{\text{écoulement de cylindre}} + \psi_{\text{tourbillon}} \end{cases}$$

D'après (13.5.15) et (13.4.6) cela donne :

$$(13.5.18) \quad \begin{cases} \varphi = U_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) r \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi = U_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) r \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \log r \end{cases}$$

Soit pour la vitesse :

$$(13.5.19) \quad \begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = U_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -U_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

Ce cas est schématisé sur la figure 13.5 (a) ci-dessous.

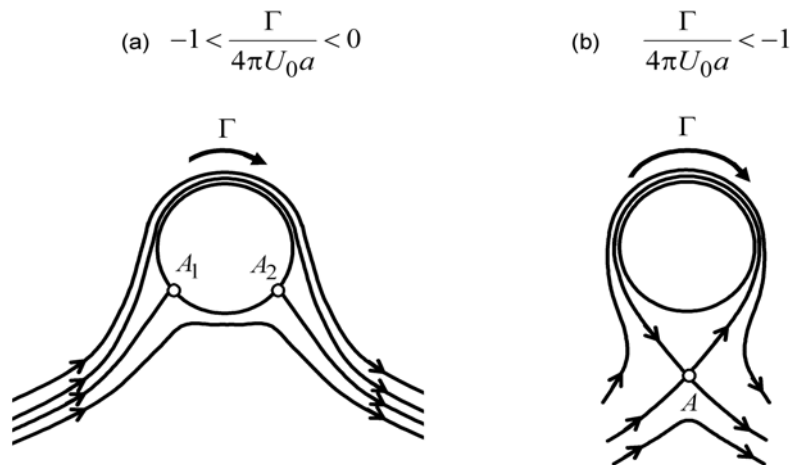


Figure 13.5 - Superposition d'un doublet, d'un tourbillon et d'un écoulement uniforme : l'écoulement cyclique autour d'un cylindre.

La circulation du tourbillon (ici négative) implique que les points d'arrêts A_1 et A_2 tels que $u_\theta = 0$ se déplacent vers le bas du cylindre conformément à la relation :

$$(13.5.20) \quad u_\theta(r=a) = -2U_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0$$

Soit :

$$(13.5.21) \quad \sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 a} \quad \text{- points d'arrêt}$$

On obtient un **point d'arrêt unique** sur le cylindre en $\theta = -\pi/2$ pour $\Gamma = -4\pi U_0 a$. Puis, comme schématisé sur la figure 13.5 (b), ce point d'arrêt quitte le cylindre pour descendre dans l'écoulement.

13.6 Effort engendré par l'écoulement potentiel acyclique autour du cylindre

Nous allons nous intéresser maintenant aux aspects dynamiques des solutions potentielles en considérant le problème des efforts exercés par un écoulement potentiel sur un cylindre. On présente le cas de l'écoulement acyclique dans le corps du texte. Le cas de l'écoulement cyclique est proposé en approfondissement.

➤ Généralités

La force résultante aérodynamique a été définie au **chapitre 6**, cf. (6.5.1). Dans le cas du fluide parfait, l'origine des efforts est exclusivement liée à la pression puisque $\underline{\tau} = 0$. On notera alors cette force $\underline{\mathcal{F}}_{aéro}^p$. Elle vaut (cf. (6.5.1) ainsi que la remarque sous cette équation) :

$$(13.6.1) \quad \underline{\mathcal{F}}_{aéro}^p \equiv \oint_{\Sigma} -p \underline{1} \cdot \underline{n} dS = - \oint_{\Sigma} (p - p_0) \underline{n} dS$$

où p_0 désigne une pression de référence. Rappelons que la normale \underline{n} désigne ici la normale **sortante** de la surface Σ de l'objet considéré.

On a par ailleurs l'habitude de caractériser la pression à l'aide du nombre sans dimension, appelé **coefficient de pression** :

$$(13.6.2) \quad C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2}$$

où ρ_0 désigne une masse volumique de référence. Soit pour la force aérodynamique :

$$(13.6.3) \quad \mathcal{F}_{aéro}^p = -\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 \iint_{\Sigma} C_p(\underline{x}) \underline{n} dS$$

➤ Application à l'écoulement potentiel autour du cylindre

Dans un écoulement potentiel tel que définit plus haut la densité est constante et la pression p est fournie par le deuxième théorème de Bernoulli que nous récrivons ici, cf. (13.2.5) :

$$(13.6.4) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \phi = C(t)$$

Si l'on fait l'hypothèse que le potentiel des forces de volume est nul ($\phi = 0$, fluide non pesant) et que l'écoulement est permanent, on retrouve alors le premier théorème de Bernoulli sous la forme (11.2.11) :

$$(13.6.5) \quad p + \frac{1}{2} \rho u^2 = p_t = p_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2 = \text{const.}$$

La pression d'arrêt p_t est celle que l'on obtient sur le cylindre aux points d'arrêt A_1 , A_2 des figures 13.4 et 13.5 (a) et au point A de la figure 13.5 (b). Compte tenu de (13.6.5) le coefficient de pression (13.6.2) devient :

$$(13.6.6) \quad C_p = 1 - \frac{u^2}{U_0^2}$$

En appliquant (13.6.3) avec $\underline{n} = \underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2$, la force résultante aérodynamique vaut :

$$(13.6.7) \quad \underline{\mathcal{F}}_{aéro}^P = -\frac{1}{2}\rho U_0^2 a \int_0^{2\pi} C_p(r=a, \theta) (\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2) d\theta,$$

Conformément aux définitions introduites en (6.5.2) et (6.5.3), la relation ci-dessus mène aux expressions suivantes pour la **force de traînée** \mathcal{D}^P (*drag*) et la **force de portance** \mathcal{L}^P (*lift*) du cylindre dans un écoulement potentiel :

$$(13.6.8) \quad \begin{cases} \underline{\mathcal{F}}_{aéro}^P = \mathcal{D}^P \underline{e}_1 + \mathcal{L}^P \underline{e}_2 \\ \mathcal{D}^P = \underline{\mathcal{F}}_{aéro}^P \cdot \underline{e}_1 = -\frac{1}{2}\rho U_0^2 a \int_0^{2\pi} C_p(a, \theta) \cos \theta d\theta \\ \mathcal{L}^P = \underline{\mathcal{F}}_{aéro}^P \cdot \underline{e}_2 = -\frac{1}{2}\rho U_0^2 a \int_0^{2\pi} C_p(a, \theta) \sin \theta d\theta \end{cases}$$

En normalisant ces expressions par la pression dynamique $\frac{1}{2}\rho U_0^2$ multipliée par une longueur de référence, que nous prendrons égale au diamètre du cylindre $2a$, on obtient pour le **coefficient de traînée** et le **coefficient de portance** du cylindre, cf. (6.5.4) :

$$(13.6.9) \quad \begin{cases} C_D^P \equiv \frac{\mathcal{D}^P}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 (2a)} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} C_p(a, \theta) \cos \theta d\theta \\ C_L^P \equiv \frac{\mathcal{L}^P}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 (2a)} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} C_p(a, \theta) \sin \theta d\theta \end{cases},$$

Analysons alors l'allure du coefficient de pression $C_p(a, \theta)$ que l'on doit ainsi intégrer. En utilisant l'expression (13.6.6) où la vitesse est définie par (13.5.16), on obtient :

$$(13.6.10) \quad C_p(\theta) = 1 - \frac{u_\theta^2}{U_0^2}(r=a, \theta) = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

L'allure de cette fonction est présentée sur la figure 13.6 ci-dessous où elle est comparée à celle obtenue dans un écoulement réel. Comme on le voit, l'échec de la théorie des écoulements potentiels est patent !

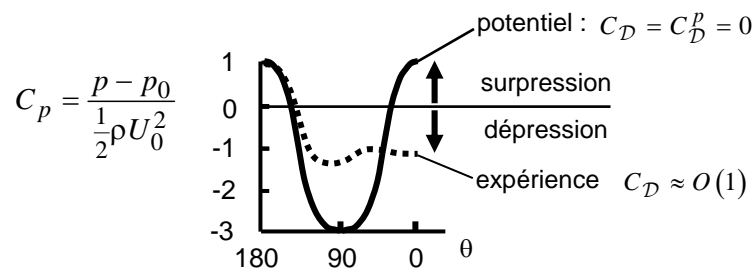


Figure 13.6 - Écoulement acyclique autour d'un cylindre : coefficient de pression $C_p(a, \theta)$.

Avant d'analyser les raisons de cet échec, interprétons les résultats théoriques que nous venons d'obtenir. L'écoulement à potentiel étant symétrique par rapport aux deux axes Ox_1 et Ox_2 , cf.

(13.6.10), le champ de pression vérifie les symétries :

$$(13.6.11) \quad \begin{cases} p(\theta) = p(-\theta) \\ p(\theta) = p(\pi - \theta) \end{cases}$$

L'angle θ est défini sur la figure 13.4. On peut alors expliquer les variations de p en appliquant le théorème de la pression exposé au paragraphe 11.6 du chapitre 11 et en suivant le même raisonnement que celui effectué à propos de la figure 11.8 pour expliquer la portance d'une aile. On aboutit ainsi aux conclusions suivantes :

✓ Sur le premier et le dernier quart de la surface du cylindre, c.-à-d. dans les régions des points d'arrêt frontal A_1 et arrière A_2 de la figure 13.4, la courbure des lignes de courant est telle que la pression décroît et tend vers la pression p_0 de l'écoulement uniforme quand on s'éloigne de l'objet. La pression sur ces portions de lignes de courant est donc supérieure à p_0 : ces régions sont en surpression.

✓ Dans les deux régions latérales où la courbure des lignes de courant s'inverse, la pression doit augmenter et tendre vers p_0 loin de l'objet ; l'écoulement est donc en dépression.

C'est bien ce que traduit l'allure du coefficient de pression $C_p(\theta)$ de l'écoulement potentiel sur la figure 13.6 (trait plein). Les symétries de la fonction $C_p(a, \theta)$ ainsi obtenue aboutissent à une force résultante nulle (ce que l'on peut vérifier sans difficulté en introduisant la solution (13.6.10) dans (13.6.8)). Soit :

$$(13.6.12) \quad \mathcal{F}_{aéro}^P = 0$$

Ce résultat traduit un théorème plus général, appelé **paradoxe de d'Alembert**, que nous commenterons à la fin de ce chapitre.

➤ Confrontation à l'expérience et interprétation

Observons maintenant le comportement réel du fluide, tel que le révèlent les expériences. Le cas analysé correspond à celui de la figure 8.6 (b) du chapitre 8. Sur la figure 13.7 (a) ci-dessous, on montre un grossissement de la région proche du cylindre.

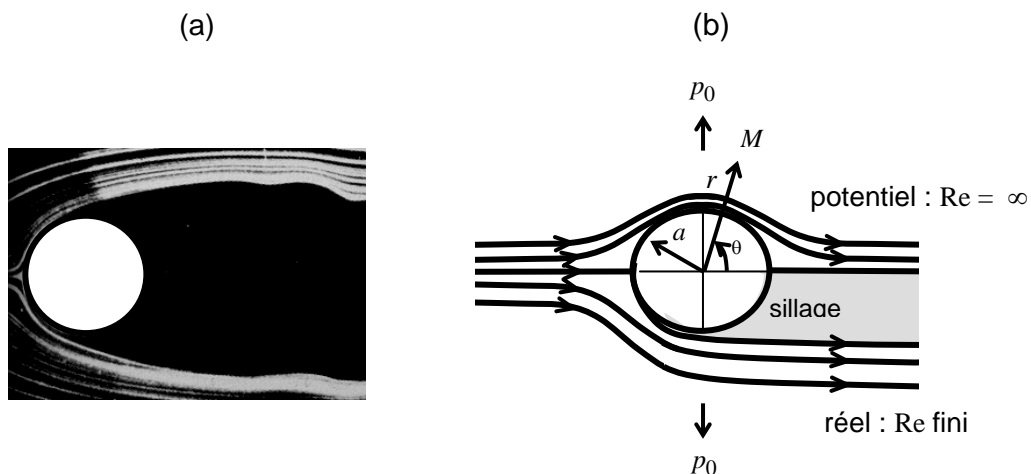


Figure 13.7 - Écoulement acyclique autour d'un cylindre : (a) visualisation pour $Re = U_0 2a/\nu = 10^4$, (b) comparaison qualitative entre les lignes de courant du cas potentiel (partie haute) et celles de l'expérience (partie basse).

L'interprétation de l'allure du coefficient de pression $C_p(a, \theta)$ relevée dans l'expérience et montrée sur la figure 13.6 peut alors s'effectuer en s'appuyant de nouveau sur le théorème de la pression. En comparant, comme nous le faisons sur la figure 13.7 (b), l'allure des lignes de courant théoriques et réelles, on voit que la présence d'un sillage épais à l'arrière du cylindre modifie profondément la forme des lignes de courant. Si l'on « solidifie » ce sillage, on peut considérer que l'écoulement uniforme amont doit contourner alors « un obstacle équivalent » radicalement différent de celui correspondant à la théorie des écoulements potentiels pour laquelle la circonférence du cylindre est une ligne de courant. L'allure des lignes de courant change peu à proximité du point d'arrêt amont, et conformément à la figure 13.6, le coefficient de pression suit alors la loi de l'écoulement potentiel (disons dans le premier quart avant du

cylindre). Mais si l'on s'éloigne de la surface du cylindre selon un rayon, l'écoulement anticipe l'épaississement et l'allongement de la région aval qu'il va devoir contourner, et les courbures se réduisent ; ces dernières s'annulent presque dans le sillage de l'objet comme le montre la partie inférieure de la figure **13.7 (b)**. Conformément au théorème de la pression, partant de la condition $p = p_0$ à l'infini, le gradient de pression perpendiculaire aux lignes de courant est atténué ; l'écoulement est donc moins dépressurisé. Le caractère quasi rectiligne de la ligne de courant fictive qui définit l'interface entre le sillage et l'écoulement potentiel extérieur dans la partie aval du cylindre fait que le coefficient de pression sature dans la région arrière du cylindre ($\theta < 90^\circ$). La recompression qui résulte de l'inversion de la courbure dans la partie arrière du cylindre dans le cas potentiel est ainsi quasiment éliminée. En conséquence la pression derrière le cylindre est nettement plus faible (elle reste proche de la valeur $p(\theta = \pm\pi/2)$) que celle qui caractérise la zone frontale (qui est proche de la pression d'arrêt $p_{st} = p(\theta = \pm\pi)$). C'est bien ce que traduit l'allure de la variation mesurée de C_p reportée sur la courbe en pointillés sur la figure **13.6**.

Le développement d'un sillage épais a donc quasiment éliminé la recompression du fluide qui caractérise l'écoulement potentiel à l'aval du cylindre. Cette dépressurisation de la partie aval de l'objet alors que la pression sur la partie frontale est peu modifiée entraîne alors l'établissement d'une force dirigée selon Ox_1 , c'est-à-dire une **force de traînée**.

➤ Traînée de pression, traînée visqueuse

Reprenons la formule générale (6.5.1) établie au **chapitre 6** pour la résultante des contraintes surfaciques. Pour un **fluide réel**, nous devons tenir compte des effets visqueux (on considère toujours que le fluide est non pesant) :

$$(13.6.13) \quad \underline{\mathcal{F}}_{aéro} = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS = \oint_{r=a} [-(p - p_0) \underline{n} + \underline{\tau} \cdot \underline{n}] dl$$

Dans cette relation \underline{n} désigne toujours la normale sortante de la surface Σ et pénétrant dans le fluide. Si l'on se cantonne à la traînée, on peut alors distinguer deux contributions, la **traînée de pression** que nous avons notée \mathcal{D}^p , cf. (13.6.8), et la **traînée visqueuse** que l'on notera \mathcal{D}^v :

$$(13.6.14) \quad \begin{cases} \mathcal{D} = \mathcal{D}^P + \mathcal{D}^V \\ \mathcal{D}^P = -\oint_{r=a} (p - p_0) \underline{n} \cdot \underline{e}_1 dl & \text{- traînée de pression} \\ \mathcal{D}^V = \oint_{r=a} (\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_1 dl & \text{- traînée visqueuse} \end{cases}$$

Lorsque le nombre de Reynolds est grand, du fait du développement de sillages tels que celui observé sur la figure **13.7 (a)** et vu les variations de la pression qui en résultent, cf. figure **13.6**, c'est la contribution de la pression qui est dominante. Soit :

$$(13.6.15) \quad \mathcal{D} \approx \mathcal{D}^P = -\oint_{r=a} (p - p_0) \underline{n} \cdot \underline{e}_1 dl \quad \text{- traînée de pression}$$

Comme l'indique l'allure du coefficient de pression expérimental $C_p(a, \theta)$ tracé sur la figure **13.6**, les variations de la pression sur la paroi du cylindre vérifient :

$$(13.6.16) \quad \delta p = |p_0 - p| = O(\rho U_0^2)$$

On déduit de ces deux dernières relations que pour les grands nombres de Reynolds le coefficient de traînée est d'ordre 1 :

$$(13.6.17) \quad C_D(\text{Re} \gg 1) \approx C_D^P = \frac{\mathcal{D}^P}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 \times \pi a^2} = O(1),$$

C'est ce que nous avons indiqué sur la droite de la figure **13.6**. Des mesures dynamométriques du coefficient de traînée \mathcal{D} du cylindre sont compilées sur la figure **13.8** ci-dessous (ligne pointillée). Elles sont comparées au cas de la sphère que nous avons montré au **chapitre 9**, cf. figure **9.6**. Dans le cas d'un cylindre, les résultats confirment que pour des nombres de Reynolds supérieurs à, disons, 10^3 , on trouve bien $C_D \approx 1$.

Remarque -

Sur la figure **13.8**, on relève que le coefficient de traînée d'une sphère vaut environ 0.5 pour $10^3 < \text{Re} < 10^6$. Il est donc aussi d'ordre 1. Mais le passage d'une géométrie bidimensionnelle (cylindre) à une géométrie tridimensionnelle (sphère) induit une réduction d'environ un facteur 2 de ce coefficient. Cela traduit le fait que l'écoulement autour de la sphère possède un degré de liberté supplémentaire qui lui permet de « mieux rester en contact » avec la surface de l'objet. Cela réduit la traînée de pression.

Par ailleurs, si l'on fait abstraction du caractère instationnaire de l'écoulement, ce dernier conserve sa symétrie par rapport à l'axe Ox_1 . Donc la **force de portance moyenne est nulle**.

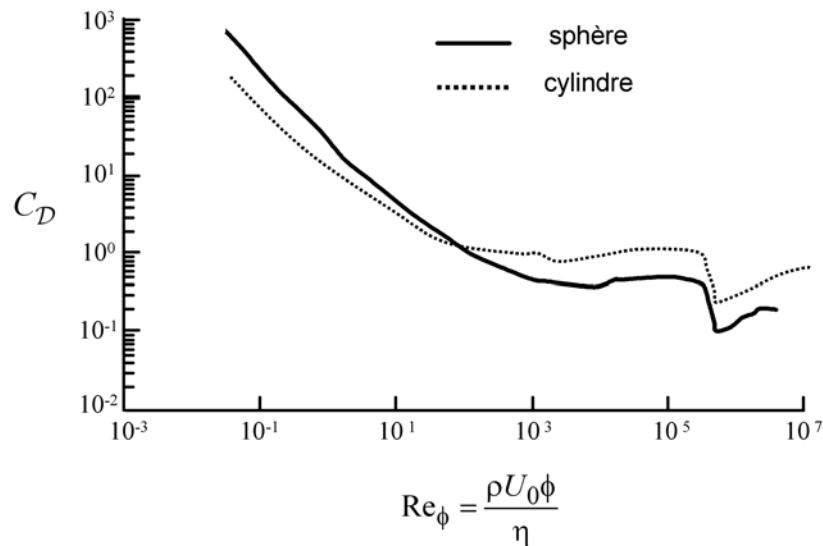


Figure 13.8 - Coefficient de traînée de la sphère et du cylindre en fonction du nombre de Reynolds (compilation ; $\phi = 2a$).

Remarque -

Comme déjà signalé au **chapitre 9** à propos de la figure 9.6 relative à la sphère, sur la figure 13.8 le coefficient de traînée C_D du cylindre présente aussi une brusque décroissance sur une certaine plage de valeurs du nombre de Reynolds au-delà de $Re = 10^5$. Conformément à l'analyse ci-dessus, puisque c'est la contribution de la pression qui est dominante, cette « crise de traînée » traduit donc une diminution de la traînée de pression. Toujours conformément à ce que nous venons de voir, cela traduit une meilleure aptitude de l'écoulement à rester au contact de la surface du cylindre sur sa partie arrière. Cette propriété est le résultat de l'apparition de la turbulence dans l'écoulement autour de l'objet considéré. Nous reviendrons sur ce phénomène dans le dernier chapitre consacré à la turbulence.

13.7 Effort engendré par l'écoulement potentiel cyclique autour du cylindre

➤ Le théorème de Kutta-Jukowski

En présence de circulation, l'écoulement potentiel cyclique autour du cylindre schématisé sur la figure 13.5 brise la symétrie selon Ox_1 . De cela résulte l'apparition d'une force de portance.

En effet, conformément à l'expression de la vitesse (13.5.19) obtenue dans ce cas, le coefficient de pression $C_p(a, \theta)$ (13.6.6) vaut maintenant :

$$(13.7.1) \quad \begin{aligned} C_p(\theta) &= 1 - \frac{u_\theta^2}{U_0^2}(r=a, \theta) = 1 - \left(-2 \sin \theta + \frac{\Gamma/2\pi a}{U_0} \right)^2 \\ &= 1 - 4 \sin^2 \theta - \left(\frac{\Gamma/2\pi a}{U_0} \right)^2 + 4 \frac{\Gamma/2\pi a}{U_0} \sin \theta \end{aligned}$$

En introduisant (13.7.1) dans les expressions des deux composantes de la force résultante aérodynamique (13.6.8) on trouve que seul le dernier terme de l'expression ci-dessus peut fournir une contribution non-nulle à cette force. Cette contribution ne concerne que la portance. Tout calcul fait, on trouve :

$$(13.7.2) \quad \boxed{\begin{cases} \mathcal{D}^P = \underline{\mathcal{F}}_{aéro}^P \cdot \underline{e}_1 = 0 \\ \mathcal{L}^P = \underline{\mathcal{F}}_{aéro}^P \cdot \underline{e}_2 = -\rho U_0 \Gamma \end{cases}}$$

Remarque -

Le calcul fait intervenir l'identité $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \pi$

La seconde formule (13.7.2) est célèbre. On montre que son application ne se limite pas au cas particulier d'un cylindre : elle s'étend à tout objet bidimensionnel plongé dans un écoulement de fluide parfait. Elle traduit un théorème qui porte le nom de **théorème de Kutta-Jukowski**. Ce théorème s'énonce comme suit.

Théorème de Kutta-Jukowski -

La force exercée par unité de longueur sur un obstacle fermé cylindrique placé dans un écoulement potentiel bidimensionnel permanent est normale à la direction de l'écoulement à l'infini et elle est égale au produit entre la masse volumique du fluide, la vitesse à l'infini amont et l'opposée de la circulation de la vitesse autour de l'obstacle.

Sa formulation mathématique est donnée par les relations (13.7.2) encadrées ci-dessus.

➤ L'effet Magnus

En pratique, pour imposer une rotation du fluide autour du cylindre, on fait tourner ce dernier. La condition d'adhérence due à la viscosité entraîne alors le fluide au contact de la paroi et engendre une circulation du fluide. Si le cylindre avance il ressent l'effet d'une force de portance (donc orientée perpendiculairement à la vitesse de translation locale de l'objet). Ce phénomène porte le nom d'**effet Magnus** en l'honneur du physicien allemand Heinrich Gustav Magnus (1802-1870) qui a révélé le rôle de ce mécanisme sur la balistique de certains projectiles d'armes à feu. Conformément au théorème de Kutta-Jukowski (13.7.2), dans le cadre du modèle des écoulements potentiels, étant donné la vitesse d'avancement U_0 cette force par unité de longueur est proportionnelle à la circulation Γ du fluide autour du cylindre, donc proportionnelle au taux de rotation Ω du cylindre.

Remarque -

Ce taux de rotation est relié à la circulation par : $\Gamma = 2\pi a u_0 = 2\pi\Omega a^2$.

Cela est illustré par la figure 13.9 ci-dessous qui montre une visualisation de l'écoulement autour d'un cylindre tournant placé dans un écoulement de vitesse amont uniforme. Cette image a été obtenue par la technique des trajectoires de micro-bulles.

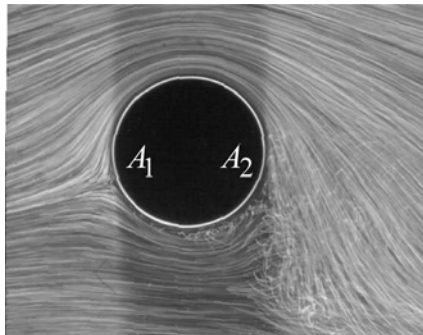


Figure 13.9 - Visualisation par micro-bulles d'air de l'écoulement autour d'un cylindre tournant dans un tunnel hydrodynamique. Le fluide s'écoule de la gauche vers la droite et le taux de rotation du cylindre est négatif (sens horaire). Cette rotation engendre une force de portance verticale et dirigée vers le haut (source : Werlé, 1987).

Remarque -

Par comparaison avec le schéma théorique de la figure 13.5 (a), on devine que l'écoulement dans la région du point d'arrêt aval A_2 est instationnaire (on observe le même type de comportement des trajectoires de bulles qu'à l'arrière de l'automobile vue au chapitre 2 sur la figure 2.18). Le fluide réel ne se comporte pas vraiment comme un fluide potentiel. Si l'on augmente le taux de rotation du cylindre, la dégradation de la solution potentielle s'accroît.

➤ Conclusion

Le modèle des écoulements potentiels prédit qu'un objet bidimensionnel placé dans un écoulement potentiel subit l'effet d'une force de portance dès lors qu'il existe une circulation de la vitesse du fluide autour de l'objet. C'est l'effet Magnus. La valeur de portance (force de Magnus) est donnée par le théorème de Kutta-Jukowski, cf. (13.7.2). La circulation qui intervient dans cette formule est indéterminée. Dans un fluide réel, cette circulation du fluide est obtenue, via la condition d'adhérence, au moyen d'une mise en rotation de l'objet selon un axe perpendiculaire à l'écoulement.

➤ Application : exemples

Une application classique de ce principe est celle de l'effet que l'on peut donner à la trajectoire d'une balle de jeu lorsqu'on lui imprime une rotation initiale, en la « brossant » ou en la « coupant ». La force de Magnus qui en résulte dévie alors la balle de sa trajectoire balistique standard qui résulte de la seule action du poids de la balle et de sa traînée. Ce mécanisme est stratégique pour tous les jeux de balle, tels que le football, le volley-ball, le tennis, le tennis de table ou encore le golf. Nous reviendrons sur ce point dans le dernier chapitre lorsque nous aurons introduit la turbulence.

Un autre exemple d'application que l'on peut citer est la **turbovoile** de Cousteau-Malavard illustré par les deux figures suivantes. Ce procédé fournissait environ 25 à 30 % de l'énergie propulsive qui venait assister la propulsion par hélice du navire « Alcyone » du commandant Cousteau montré sur la figure 13.10.



Figure 13.10 - La turbovoile : le navire « Alcyone » propulsé par deux turbovoiles.

Son principe est expliqué sur la figure 13.11 : il consiste à forcer la position du point d'arrêt aval, le point A_2 des figures 13.5 (a) et 13.9, en aspirant l'écoulement à travers un évent latéral parallèle à l'axe d'un cylindre, cf. figure 13.11 (a). Les conséquences sont expliquées sur les figures 13.11 (b) et (c). Cette technique de propulsion éolienne constitue donc une autre application de la physique des écoulements potentiels.

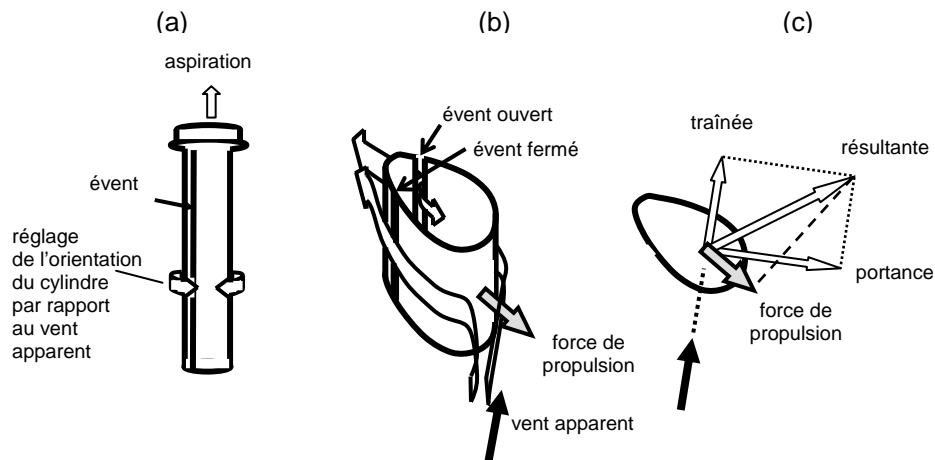


Figure 13.11 - Principe de la turbovoile.

13.8 Le paradoxe de d'Alembert

➤ Formulation générale

Pour clore ce chapitre consacré aux écoulements potentiels ainsi que ces exposés sur le fluide parfait, nous revenons sur le résultat théorique de la figure 13.6 qui montre que la force de résistance à l'avancement d'un obstacle cylindrique bidimensionnel dans un écoulement potentiel est nulle par symétrie de la distribution de la pression sur la surface du cylindre. Ce résultat qui concerne l'écoulement autour d'un cylindre est en fait plus général. Il repose sur un théorème qui porte le nom de **paradoxe de d'Alembert** et qui s'énonce comme suit :

Paradoxe de d'Alembert -

La résultante des efforts exercés par un écoulement de fluide parfait incompressible sans forces extérieures sur un corps rigide imperméable en mouvement de translation uniforme est nulle à condition que l'écoulement soit acyclique.

La démonstration de ce théorème peut s'effectuer au moyen d'un bilan dans un volume de contrôle comme celui de la figure 13.12 ci-dessous. On considère pour cela la force résultante aérodynamique exprimée dans ce volume de contrôle en fonction du bilan des flux et des

contraintes appliquées sur l'enveloppe extérieure du volume. La formule générale a été donnée au **chapitre 6** par l'équation (6.6.4) dans le cas où l'enveloppe extérieure du volume de contrôle était constituée de deux section débitantes A_1 et A_2 et d'un tube de courant de section S , cf. figure 6.12. Dans le cas de la figure 13.12 ci-dessous on considère une enveloppe globale fermée quelconque notée S .

En éliminant la gravité (fluide sans force extérieure), en posant $\underline{\tau} = 0$ (fluide parfait) et en considérant le différentiel de pression $p - p_0$ au lieu de la pression statique dans la première intégrale (ce qui ne change rien puisque l'intégrale d'une constante est nulle sur un contour fermé), ce bilan s'écrit :

$$(13.8.1) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{aéro} = - \oint\oint_S (p - p_0) \underline{1} \cdot \underline{n} \, dS - \oint\oint_S \rho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS \\ S = \text{enveloppe extérieure} \end{cases}$$

La force $\mathcal{F}_{aéro}$ est donc entièrement déterminée par le comportement du champ de pression et par celui du champ des vitesses sur l'enveloppe extérieure S , que nous supposons ici rejetée à l'infini.

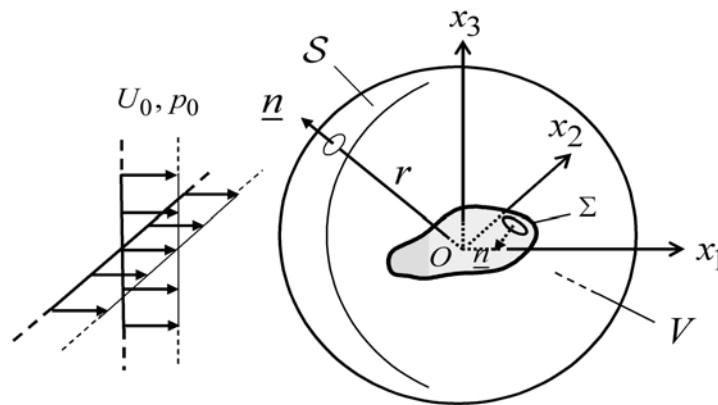


Figure 13.12 - Volume de contrôle pour l'analyse du bilan des efforts sur un corps rigide imperméable immergé dans un écoulement stationnaire uniforme de fluide parfait..

➤ Ecoulement acyclique en géométrie bidimensionnelle

Dans le cas d'une géométrie **bidimensionnelle**, l'examen des solutions potentielles élémentaires présentées aux paragraphes 13.4 et 13.5 suggère que l'effet d'un obstacle dans un écoulement potentiel **acyclique** peut être représenté pour le champ de vitesse par une série de

termes correspondant à des dérivées successives de la fonction $1/r$: l'effet d'une source ou d'un puits est une fonction de $1/r$, cf. (13.4.3), celui d'un dipôle est une fonction de $1/r^2$, cf. (13.5.10), etc.

Dans le cas d'un obstacle d'extension longitudinale finie, la conservation de la masse élimine la présence de termes monopolaires du type source. Le premier terme non nul de la série qui caractérise la perturbation de l'écoulement uniforme est alors le dipôle, donc un terme proportionnel à $1/r^2$.

Remarque -

Le caractère fini de l'objet exclut par exemple le problème de la plaque plane de la figure 13.2 que nous avons modélisé en introduisant une source.

Le flux de quantité de mouvement, qui est le dernier terme du second membre de (13.8.1), est donc nul puisque l'on intègre une quantité proportionnelle à $\underline{u}^2 \sim 1/r^4$ sur une surface $\mathcal{S} \sim r^2$. Quant au premier terme de (13.8.1), le terme de pression, d'après le théorème de Bernoulli il est aussi proportionnel à $\underline{u}^2 \sim 1/r^4$. Son intégrale s'annule donc également.

Au bilan cela prouve que l'effort engendré par un écoulement potentiel acyclique sur un obstacle solide bidimensionnel quelconque (que l'on devra représenter par une série de termes en puissance de $1/r$ aussi longue que nécessite la complexité de sa forme) est nul. Cela traduit le **paradoxe de d'Alembert** énoncé plus haut.

➤ **Écoulement en géométrie tridimensionnelle.**

Pour un écoulement tridimensionnel, on peut montrer que la puissance des termes de la série perturbative due à la présence de l'obstacle augmente d'une unité : le premier terme, celui correspondant au dipôle dans le cas précédent, varie comme $1/r^3$. Cela est conforme à la conservation de la masse en géométrie tridimensionnelle. Les conséquences sont donc, a fortiori, identiques à celles du cas précédent : la force résultante est nulle.

➤ **Écoulement cyclique en géométrie bidimensionnelle**

Dans le cas d'un écoulement potentiel bidimensionnel **cyclique**, viennent s'ajouter au début de la série des termes proportionnels à $\Sigma_i \Gamma_i / r$ dus à des tourbillons ponctuels, où Γ_i désigne la circulation des tourbillons, cf. (13.4.5). On intègre alors dans (13.8.1) des termes

proportionnels à $1/r^2$ sur une surface proportionnelle à r^2 . Le problème devient donc indéterminé. On peut alors montrer, comme cela est fait dans l'approfondissement du paragraphe 13.7 ci-dessus que la contribution des tourbillons ne participe qu'à la portance. La traînée reste nulle. Dans ce cas le paradoxe de d'Alembert se limite donc à la projection de la résultante des efforts dans la direction de l'écoulement. L'autre composante, la portance, est indéterminée et nécessite une condition supplémentaire, cela afin de fixer la circulation totale Γ .

Remarque -

Dans le cas où l'objet est un profil d'aile qui présente un bord de fuite aigu, c.-à-d. un dièdre d'angle fini ou nul (dans ce dernier cas on a à faire à un point de rebroussement), cette condition supplémentaire consiste à imposer que le fluide reste au contact de la surface du profil jusqu'à ce bord de fuite. Cette condition, appelée **condition de Kutta**, se trouve à la base de tous les développements historiques dans le domaine de l'aérodynamique des profils d'ailes. Elle ne sera pas détaillée dans ce cours,

13.9 Résumé des formules essentielles

➤ Deuxième théorème de Bernoulli

✓ Hypothèse

Écoulement de **fluide parfait, irrotationnel, barotrope**, dans lequel **les forces de volume dérivent d'un potentiel**,

✓ **Énoncé**, cf. (13.1.3), (13.1.5), (13.1.7), (13.1.9)

$$(13.9.1) \quad \underline{u} = \underline{\text{grad}} \varphi$$

$$(13.9.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \phi = C(t)$$

$$(13.9.3) \quad \varphi' = \varphi - \int C(t) dt$$

$$(13.9.4) \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \phi = 0$$

➤ Les écoulements potentiels

✓ Hypothèses

Écoulement **irrotationnel** de **fluide parfait incompressible homogène**, où les **forces de volume** dérivent d'un **potentiel**.

✓ **Equations**, cf. (13.2.4)-(13.2.5)

$$(13.9.5) \quad \begin{cases} \Delta \varphi(\underline{x}, t) = 0 \\ \text{conditions initiales} \\ \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

$$(13.9.6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{\underline{u}^2}{2} + \phi = C(t) \quad - \text{deuxième théorème de Bernoulli}$$

➤ **Solutions élémentaires**

✓ **Ecoulement uniforme**, cf. (13.4.2)

$$(13.9.7) \quad \begin{cases} \varphi = U_0 (\cos \alpha x_1 + \sin \alpha x_2) \\ \psi = U_0 (-\sin \alpha x_1 + \cos \alpha x_2) \end{cases}$$

✓ **Source**, cf. (13.4.4)

$$(13.9.8) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{Q}{2\pi} \log r \\ \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \end{cases}$$

✓ **Tourbillon**, cf. (13.4.6)

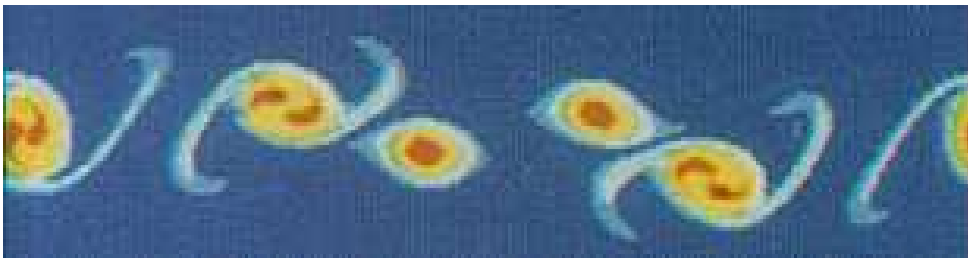
$$(13.9.9) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \log r \end{cases}$$

➤ **Le paradoxe de d'Alembert**

La résultante des efforts exercés par un écoulement de fluide parfait incompressible sans forces extérieures sur un corps rigide imperméable en mouvement de translation uniforme est nulle à condition que l'écoulement soit acyclique.

Chapitre 14

Dynamique de la vorticité



Chapitre 14.	La dynamique de la vorticité	489
14.1	Objectif	489
14.2	Les propriétés cinématiques de la vorticité : rappels et compléments	490
	La représentation du champ de vorticité	490
	Les lois de Helmholtz	492
	Remarques	493
	Conséquences sur la forme des lignes de vorticité	493
14.3	L'effet du champ de vitesse sur la vorticité : l'équation de Helmholtz	494
	Premier membre	494
	Second membre	495
	Bilan	496
14.4	Le caractère matériel de la vorticité dans les écoulements de fluide parfait barotrope en présence de forces extérieures conservatives	497
	Le cas des écoulements bidimensionnels	499
	Interprétation	500
14.5	La distorsion de la vorticité : contraction, étirement et gauchissement	502
	Contraction/étirement et gauchissement	502
	Dynamique linéaire : distorsion d'un tube de vorticité individuel	504
	Contraction/étirement : exemple	504
	Gauchissement : exemple	507
	Approfondissement ** - écoulements secondaires dans une conduite coudée	508
14.6	L'effet de la vorticité sur le champ de vitesse : la loi d'induction de Biot-Savart	510
14.7	Application : tourbillon filament et nappe de vorticité	514
	Cas d'un tourbillon filament	514
	Cas d'un tourbillon filament rectiligne	515
	Cas d'une nappe de vorticité isolée	516
14.8	Approfondissement ** - Instationnarité d'interfaces : théorie	519
	Introduction	519
	Les �quations	520
	Conditions aux limites à l'infini	521
	Conditions cinématiques	521
	Condition dynamique et deuxième théorème de Bernoulli	522
	Synthèse	523
	Solutions : ondes propagatives	524
	Application : ondes de surface, instabilité de Rayleigh-Taylor et houle	526
➤	L'instabilité de Kelvin – Helmholtz : propriétés	528
14.9	L'instabilité de Kelvin-Helmholtz : phénoménologie et interprétation	529
	L'instabilité de Kelvin – Helmholtz : interprétation	530
	L'appariement tourbillonnaire	532
	Confrontation aux expériences	534
14.10	Le rôle de la viscosité	535
	Le terme visqueux de l'équation d'Helmholtz	536
	L'équation d'Helmholtz pour un écoulement de fluide newtonien incompressible homogène avec force de volume dérivant d'un potentiel	538
14.11	Résumé des formules essentielles	540

Chapitre 14. La dynamique de la vorticité

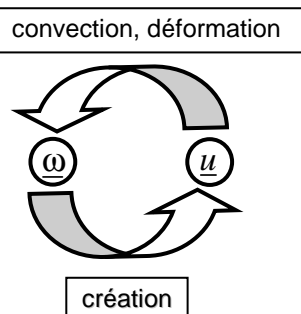
14.1 Objectif

La vorticité est une propriété cinématique du milieu continu qui joue un rôle tout particulier dans le cas des écoulements de fluides. Comme vu précédemment :

- ✓ elle intervient dans l'équilibre dynamique général des écoulements de fluide parfait que traduit la relation de Crocco (12.1.8) ;
- ✓ de nombreux écoulements sont le siège de concentrations de vorticité qui prennent la forme de tourbillons. En pi geant des traceurs que l'on introduit dans les écoulements (fumées, colorants, bulles), ces tourbillons peuvent être « visualisés ».

Bien que la vitesse \underline{u} et sa vorticité $\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u}$ soient indissociables, la **dynamique de la vorticité** consiste à adopter un point de vue diff rent. Elle part de l'hypothèse qu'il existe dans l'écoulement des régions dominées par la vorticité et des régions irrotationnelles, ou quasi-irrotationnelles. Ce point de vue conduit alors à examiner les interactions mutuelles entre la vitesse de l'écoulement et sa vorticité. Ces interactions sont schématisées sur la figure 14.1 ci-dessous

$$\text{Helmholtz : } \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \nabla \underline{\omega} \cdot \underline{u} = \dots$$



$$\text{Biot-Savart : } \underline{u} = \text{rot}^{-1}(\underline{\omega})$$

Figure 14.1 - La dynamique de la vorticité : interactions entre la vorticité $\underline{\omega}$ et la vitesse \underline{u} .

Ce schéma phénoménologique distingue deux branches :

- ✓ A tout instant, le champ de vitesse \underline{u} transforme, par convection et déformation, le champ de vorticité $\underline{\omega}$.
- ✓ Le champ de vorticité, ainsi modifié « crée » alors à son tour un nouveau type de mouvement $\underline{u} = \underline{rot}^{-1}(\underline{\omega})$.

L'objet principal de ce chapitre est d'analyser tour à tour ces deux mécanismes. Le premier, celui qui concerne l'action du champ de vitesse sur la vorticité, va être étudié au moyen de l'équation de bilan local de la vorticité, l'** quation de Helmholtz**. Le second, qui a trait à l'effet de la vorticité sur le champ de vitesse, se traduit par la loi d'induction de **Biot-Savart**.

Avant d'affronter ces deux problèmes, nous allons tout d'abord rassembler et compléter toutes les notions enseignées jusqu'ici sur les propriétés cinématiques de la vorticité.

14.2 Les propriétés cinématiques de la vorticité : rappels et compléments

➤ La représentation du champ de vorticité

Nous avons introduit au paragraphe 2.10 du **chapitre 2** les notions de cinématique utilisées pour représenter le champ de vorticité. Elles sont nombreuses. Rappelons-les :

- ✓ La **vorticité** $\underline{\omega}$: c'est le rotationnel de \underline{u} , soit le double du taux de rotation local $\underline{\Omega}$, cf. (2.10.2).
- ✓ La **circulation** Γ : c'est l'intégrale linéique de la vitesse sur une courbe fermée C ; c'est aussi le flux de $\underline{\omega}$ à travers toute surface S s'appuyant sur C (formule de Stokes, cf. (2.10.9)). La circulation est une mesure de l'**intensité du tube de vorticité** qui s'appuie sur C (voir ci-dessous).
- ✓ La **ligne de vorticité** : c'est une ligne partout tangente à $\underline{\omega}$, cf. figure 2.24 (a).

- ✓ Le **nappe de vorticité** : c'est l'ensemble des lignes de vorticité s'appuyant sur une courbe géométrique C , cf. figure 2.24 (b).
- ✓ le **tube de vorticité** : c'est la nappe de vorticité obtenue lorsque C est une courbe fermée, cf. figure 2.24 (c).
- ✓ Le **tube tourbillon**, ou **tourbillon** : c'est un tube de vorticité localisé dans un environnement irrotationnel, ou, par extension, dans un environnement de vorticité « beaucoup moins grande » que celle de ce tube tourbillon, cf. figure 2.26 (a).
- ✓ Le **filament de vorticité**, ou **tourbillon filament** : c'est la ligne singulière obtenue en faisant tendre la section d'un tube tourbillon vers zéro tout en maintenant constante sa circulation, cf. figure 2.26 (b).

Nous allons compléter cela par quelques informations supplémentaires qui concernent aussi les propriétés cinématiques de $\underline{\omega}$.

Remarque -

Plutôt que de le faire dès le **chapitre 2** consacré à la cinématique, nous avons préféré atteindre ce stade du cours pour introduire ces notions.

Le caractère solénoïdal du champ vectoriel $\underline{\omega} = \underline{rot} \underline{u}$ impose que :

$$(14.2.1) \quad \operatorname{div} \underline{\omega} = 0 \quad \forall \underline{x}, \forall t$$

D'après le théorème de flux-divergence, cela implique que pour tout volume géométrique $V(t)$ dessiné dans le fluide :

$$(14.2.2) \quad \boxed{\iiint_{V(t)} \operatorname{div} \underline{\omega} dV = \oiint_{S(t)} \underline{\omega} \cdot \underline{n} dS = 0 \quad \forall V, \forall t}$$

De cette relation on peut déduire plusieurs implications qui constituent les lois de Helmholtz.

➤ Les lois de Helmholtz

La relation cinématique (14.2.2) qui stipule que le flux de $\underline{\omega}$ à travers toute surface fermée dans un fluide est identiquement nul implique l'absence de « source » ou « puits » de vorticité au sein d'un écoulement. Comme schématisé sur la figure 14.2 ci-dessous, on considère alors un tube de vorticité à l'instant t , que l'on note Σ .

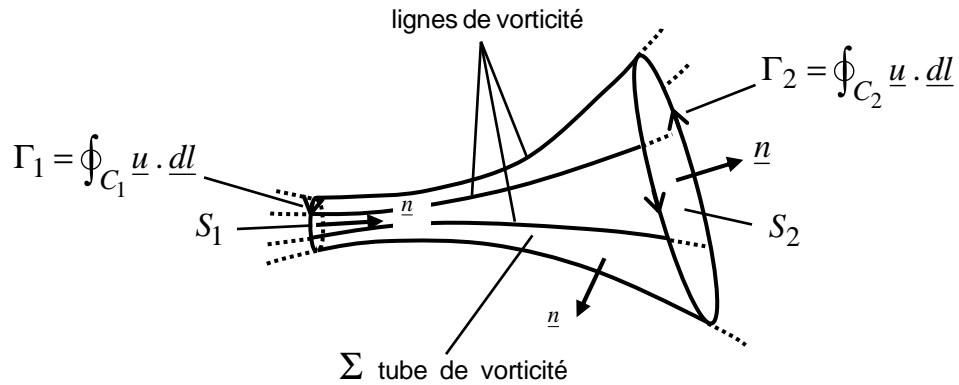


Figure 14.2 - Tube de vorticité et première loi d'Helmholtz : définitions.

Si S_1, S_2 désignent deux surfaces s'appuyant sur deux contours fermés C_1, C_2 appartenant à Σ , et si l'on note \underline{n} la normale locale en chaque point de chacune de ces trois surfaces, puisque par définition $\underline{\omega} \cdot \underline{n} = 0$ sur Σ , la loi (14.2.2) devient :

$$(14.2.3) \quad \iint_{S_1} \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, dS + \iint_{S_2} \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, dS = 0,$$

En appliquant la relation de Stokes, cela signifie que :

$$(14.2.4) \quad \Gamma_1 = \oint_{C_1} \underline{u} \cdot \underline{dl} = \iint_{S_1} \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, dS = \iint_{S_2} \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, dS = \oint_{C_2} \underline{u} \cdot \underline{dl} = \Gamma_2,$$

On en conclut que la circulation d'un tube de vorticité est une **quantité intrinsèque** attachée à ce tube de vorticité. C'est la **première loi d'Helmholtz** :

Première loi d'Helmholtz -

La circulation d'un tube de vorticité est une constante indépendante de la section du tube considérée.

➤ Remarques

✓ On fera attention de ne pas confondre la **première loi d'Helmholtz** qui stipule que la circulation d'un tube de vorticité est la même pour tout le tube et à tout instant, et le **théorème de Kelvin** vu au **chapitre 12** qui stipule que cette circulation Γ reste constante au cours du mouvement de ce tube dans le cas particulier des écoulements de fluide parfait barotrope où les forces de volume sont conservatives. Si l'écoulement ne vérifie pas l'une de ces dernières propriétés, par exemple si l'on ne peut pas négliger les effets de la viscosité, alors chaque tube de vorticité reste caractérisé par une circulation de valeur unique (première loi d'Helmholtz), mais cette valeur change au cours du temps.

✓ Comme illustré sur le schéma de la figure **14.2**, le fait que la circulation du tube de vorticité soit une constante qui caractérise tout ce tube implique alors que la **vorticité moyenne** dans une section donnée du tube est inversement proportionnelle à l'étendue de cette section : plus un tube de courant est étroit, plus grande est l'amplitude moyenne de la vorticité qu'il délimite.

➤ Conséquences sur la forme des lignes de vorticité

Les autres lois de Helmholtz ont trait aux propriétés des lignes de vorticité qui découlent de la relation **(14.2.2)**. Notamment :

✓ une ligne de vorticité ne peut pas se terminer dans le fluide, car cela violerait la première loi de Helmholtz (le tube singulier constitué par cette ligne de vorticité poss derait en effet une circulation variant brutalement d'une valeur donnée à zéro en parcourant ce tube) ;

✓ ce ne peut donc être qu'une **ligne infinie**, une **ligne fermée** (un anneau), ou encore une ligne dont les deux extrémités sont **en contact avec les frontières de l'écoulement**. La figure **14.3** ci-dessous illustre les deuxième et troisième cas.

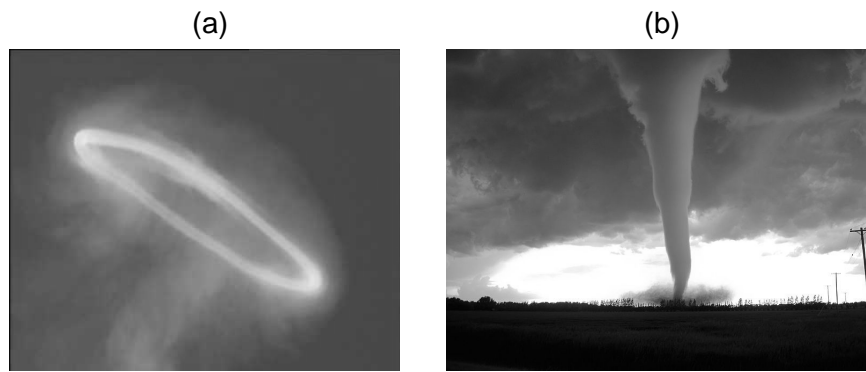


Figure 14.3 - A propos de la topologie des lignes de vorticité : (a) un tourbillon annulaire visualisé par de la fumée (cas observé au dessus du volcan Etna), (b) une tornade.

Remarque -

Pour le cas de la figure **14.3 (b)**, dans la mesure où l'on sait que la vitesse s'annule au contact du sol (par adhérence) on laissera au lecteur le soin d'imaginer comment évolue le tube de vorticité que constitue la tornade au niveau de sa base, au fur et à mesure que l'on s'approche de la surface du sol.

14.3 L'effet du champ de vitesse sur la vorticité : l'équation de Helmholtz

On s'intéresse ici à la branche supérieure de la figure **14.1**, à savoir l'effet de \underline{u} sur $\underline{\omega}$. Pour cela nous allons établir l'** quation de bilan de la vorticité** $\underline{\omega}$. Cette équation porte le nom d'** quation d'Helmholtz**. Pour obtenir cette équation, on applique l'opérateur rotationnel à la loi de la dynamique générale sous sa forme non-conservative **(4.6.21)**, après l'avoir divisée par la masse volumique :

$$(14.3.1) \quad \text{rot} \left(\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = \underline{f} - \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p + \frac{1}{\rho} \underline{\text{div}} \underline{\tau} \right)$$

Analysons ce que cela donne, terme à terme.

➤ **Premier membre**

En faisant appel à la décomposition de Lamb **(12.1.4)**, le premier membre de **(14.3.1)** devient :

$$\begin{aligned}
 \text{(14.3.2)} \quad \underline{rot} \frac{d\underline{u}}{dt} &= \underline{rot} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \right) \\
 &= \underline{rot} \left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge \underline{u} + \underline{grad} \left(\frac{1}{2} \underline{u}^2 \right) \right] \\
 &= \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{rot} (\underline{\omega} \wedge \underline{u})
 \end{aligned}$$

On utilise alors l'identité vectorielle suivante (cf. annexe A2.4) :

$$\text{(14.3.3)} \quad \underline{rot} (\underline{A} \wedge \underline{B}) = \nabla \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \operatorname{div} \underline{B} - \nabla \underline{B} \cdot \underline{A} - \underline{B} \operatorname{div} \underline{A}$$

Pour $\underline{A} = \underline{\omega}$ et $\underline{B} = \underline{u}$, cela donne :

$$\text{(14.3.4)} \quad \underline{rot} (\underline{\omega} \wedge \underline{u}) = \nabla \underline{\omega} \cdot \underline{u} + \underline{\omega} \operatorname{div} \underline{u} - \nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega} - \underbrace{\underline{u} \operatorname{div} \underline{\omega}}_{=0}$$

En remplaçant cette relation dans (14.3.2), on obtient donc pour le rotationnel du premier membre de l'équation (14.3.1) :

$$\text{(14.3.5)} \quad \underline{rot} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \right) = \underbrace{\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \nabla \underline{\omega} \cdot \underline{u}}_{d\underline{\omega}/dt} + \underbrace{\underline{\omega} \operatorname{div} \underline{u} - \nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega}}_{\text{distorsion}}$$

Comme indiqué dans cette équation les deux premiers termes forment la dérivée particulaire de $\underline{\omega}$ et les deux derniers termes caractérisent la distorsion de $\underline{\omega}$ par \underline{u} . Ces termes seront interprétés plus tard.

➤ Second membre

Le premier terme du second membre de (14.3.1) vaut $\underline{rot} \underline{f}$. Pour le terme de pression, on retrouve le vecteur barocline (12.6.11)  tabli au chapitre 12 :

$$\text{(14.3.6)} \quad \underline{rot} \left(-\frac{1}{\rho} \underline{grad} p \right) = \frac{1}{\rho^2} \underline{grad} \rho \wedge \underline{grad} p$$

Enfin, pour le terme visqueux, on n'effectuera pour l'instant aucune transformation de son expression.

➤ Bilan

L'équation de **bilan de la vorticité** peut donc s'écrire :

$$(14.3.7) \quad \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underbrace{\nabla \underline{\omega} \cdot \underline{u}}_{\text{advection}} = \underbrace{\nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega} - \underline{\omega} \operatorname{div} \underline{u}}_{\text{distorsion}} + \underbrace{\operatorname{rot} \underline{f}}_{\text{production par les forces extérieures}} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \operatorname{grad} \rho \wedge \operatorname{grad} p}_{\text{production barocline}} + \underbrace{\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\tau} \right)}_{\text{diffusion visqueuse}}$$

C'est l'** quation d'Helmholtz**. Comme indiqué, l'équation d'Helmholtz révèle les quatre mécanismes qui peuvent engendrer une variation de la vorticité locale d'un fluide au cours de son transport. Ces mécanismes sont les suivants :

✓ La **distorsion** par le champ de vitesse $\nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega} - \underline{\omega} \operatorname{div} \underline{u}$. Notons que ce terme n'est pas linéaire vis-à-vis de la variable $\underline{\omega}$, car \underline{u} et $\underline{\omega}$ sont liés par la relation $\underline{\omega} = \operatorname{rot} \underline{u}$. Par ailleurs, en décomposant le tenseur gradient des vitesses en parties symétrique et antisymétrique, cf. (2.8.14), on peut écrire :

$$(14.3.8) \quad \nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega} = \underline{d} \cdot \underline{\omega} + \underline{\Omega} \cdot \underline{\omega} = \underline{d} \cdot \underline{\omega} + \underline{\Omega} \wedge \underline{\omega} = \underline{d} \cdot \underline{\omega},$$

où nous avons utilisé pour la deuxième égalité la relation (2.10.1). La troisième égalité résulte alors du fait que $\underline{\Omega} = \underline{\omega}/2$, cf. (2.10.2), ce qui annule le produit vectoriel. On peut ainsi remplacer dans l'équation d'Helmholtz (14.3.7) le terme $\nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega}$ par $\underline{d} \cdot \underline{\omega}$, terme qui caractérise l'** tirement de la vorticité** par le champ de vitesse.

✓ La **production par les forces de volume** $\operatorname{rot} \underline{f}$. Si ces forces dérivent d'un potentiel, donc si $\underline{f} = -\operatorname{grad} \phi$, ce terme est nul.

✓ La **production barocline** $(\underline{grad} \rho \wedge \underline{grad} p) / \rho^2$. Si le fluide est **barotrope**, tel que $\rho = \rho(p)$, ce terme est nul.

✓ La **diffusion visqueuse** $\underline{rot} \left(\frac{1}{\rho} \underline{div} \underline{\tau} \right)$ qui caractérise l'effet diffusif de la viscosité. Ce terme est nul dans un fluide parfait.

Remarque -

Le caractère diffusif pour la vorticité du terme visqueux $\underline{rot} \left[\underline{div} \left(\underline{\tau} \right) / \rho \right]$ sera mieux mis en évidence quand nous appliquerons cette équation à la fin du chapitre au cas du fluide newtonien incompressible de coefficient de viscosité constant. On montrera alors que $\underline{rot} \left[\underline{div} \left(\underline{\tau} \right) / \rho \right] = 2\nu \underline{rot} \left(\underline{div} \underline{d} \right) = \nu \Delta \underline{\omega}$. On obtient donc l'opérateur laplacien, typique des processus de diffusion.

14.4 Le caractère matériel de la vorticité dans les écoulements de fluide parfait barotrope en présence de forces extérieures conservatives

Si l'écoulement est celui d'un **fluide parfait barotrope** où les **forces de volume dérivent d'un potentiel**, l'équation d'Helmholtz (14.3.7) ne retient que les termes qui caractérisent la distorsion de $\underline{\omega}$ par le champ de vitesse :

$$(14.4.1) \quad \boxed{\frac{d\underline{\omega}}{dt} = \nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega} - \underline{\omega} \underline{div} \underline{u}}$$

Les deux termes de distorsion au second membre étant proportionnels à $\underline{\omega}$, si $\underline{\omega} = 0$ en un point d'une trajectoire alors $d\underline{\omega}/dt = 0$ de sorte que $\underline{\omega} = 0$ sur tout le reste de cette trajectoire. Donc, si un écoulement de fluide parfait est irrotationnel à un instant, il le demeure à tout instant. On retrouve ici le **théorème de Lagrange** dont l'équation d'Helmholtz constitue la version locale.

Nous analyserons en détail dans le prochain paragraphe les mécanismes de distorsion de la vorticité par le champ de vitesse qui correspondent au second membre de l'équation (14.4.1). Pour l'instant nous nous limiterons à souligner une première propriété importante de ces

mécanismes. Cette propriété se révèle lorsqu'on remplace la divergence de la vitesse par son expression donnée par l'équation de continuité :

$$(14.4.2) \quad \operatorname{div} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

L'équation d'Helmholtz réduite à (14.4.1) peut alors s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$(14.4.3) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\underline{\omega}}{\rho} \right) = \nabla \underline{u} \cdot \frac{\underline{\omega}}{\rho}}$$

On remarque que l'on obtient alors la même équation que celle qui caractérise la déformation d'un ** l ment matériel** infinitésimal $\underline{\delta M}(t)$ par un champ de vitesse, cf. (2.8.8) :

$$(14.4.4) \quad \frac{d}{dt} \underline{\delta M} = \nabla \underline{u} \cdot \underline{\delta M}$$

Cela prouve que les variations temporelles du vecteur $\underline{\omega}/\rho$ en tout point d'une ligne de vorticité sont identiques à celles du vecteur matériel élémentaire tangent. Ainsi :

Dans un écoulement de **fluide parfait barotrope** où les forces volumiques dérivent d'un potentiel, la vorticité pondérée par la masse volumique $\underline{\omega}/\rho$ se comporte comme l'élément matériel tangent à ce vecteur.

Dans un écoulement de **fluide parfait incompressible**, c'est la vorticité $\underline{\omega}$ elle-même qui vérifie cette propriété.

On peut donc écrire :

$$(14.4.5) \quad \boxed{\frac{\underline{\omega}}{\rho}(t=0) = \text{const.} \times \underline{\delta M}(t=0) \Rightarrow \frac{\underline{\omega}}{\rho}(t) = \text{const.} \times \underline{\delta M}(t)}$$

Cette propriété est schématisée sur la figure **14.4** ci-dessous. Par voie de conséquence : toute distorsion d'une ligne mati rielle se répercute directement sur la vorticité tangente à cette ligne. Nous détaillerons cela plus loin.

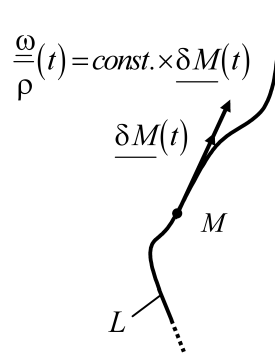


Figure 14.4 - Ligne de vorticité L dans un écoulement de fluide parfait barotrope : la vorticité pondérée par la masse volumique $\underline{\omega}/\rho$ se comporte comme l'élément mati riel tangent, soit $\underline{\omega}/\rho = \text{const.} \times \underline{\delta M}$.

➤ Le cas des écoulements bidimensionnels

Comme déjà vu au **chapitre 12**, si le champ des vitesses est **bidimensionnel**, par exemple tel que :

$$(14.4.6) \quad \begin{cases} \underline{u} = (u_1, u_2, 0)(x_1, x_2, t) \\ \underline{\omega} = (0, 0, \omega)(x_1, x_2, t) \end{cases},$$

la **vorticité est perpendiculaire au plan de l'écoulement** puisque tous les gradients de la vitesse sont contenus dans ce plan, cf. figure **12.1 (b)**. Dans ce cas, le terme de distorsion $\nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega}$ est nul :

$$(14.4.7) \quad \nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega} = 0 \quad - \text{Cas des écoulements bidimensionnels}$$

L'équation (14.4.3) devient :

$$(14.4.8) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) = 0}$$

Ainsi :

Dans un écoulement **bidimensionnel de fluide parfait barotrope** où les forces de volume dérivent d'un **potentiel**, la vorticité pondérée par la masse volumique est un **invariant matériel**. Elle est déterminée par ses conditions initiales et elle se conserve le long des trajectoires de chaque « particule de fluide ».

Dans un écoulement de **fluide parfait incompressible**, la vorticité est un invariant matériel.

➤ Interprétation

Comme sch matis   à la figure **14.5** ci-dessous, pour interpréter convenablement la partie non-visqueuse de la dynamique du champ de vorticité décrite ci-dessus il faut associer à chaque « particule de fluide » possédant une vorticité non nulle, un **tube de vorticité élémentaire** caract ris   par sa section δS de normale \underline{n} parallèle au vecteur vorticité en son centre et par sa hauteur δM telle que $\underline{\delta M} = \delta M \underline{n}$.

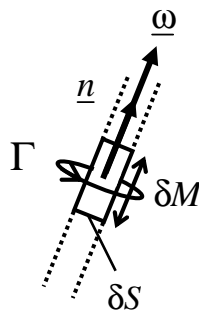


Figure 14.5 - Tube de vorticité élémentaire

La masse δm de cet élément de fluide vaut :

$$(14.4.9) \quad \delta m = \rho \delta S \underline{n} \cdot \underline{\delta M} = \rho \delta S \delta M$$

D'après la conservation de la masse, cette quantité est une constante. Par ailleurs, compte tenu de (14.4.5), si   un instant t donn   il existe une constante ε telle que :

$$(14.4.10) \quad \underline{\omega}(t) = \varepsilon \rho \underline{\delta M}(t),$$

en contractant cette relation avec $\underline{n} \delta S$, on obtient à tout instant ultérieur :

$$(14.4.11) \quad \underline{\omega} \cdot \underline{n} \delta S = \varepsilon \rho \underline{\delta M} \cdot \underline{n} \delta S = \varepsilon \delta m = \text{const.}$$

On retrouve ici le **théorème de Kelvin**. En effet, si Γ désigne la circulation du tube de vorticité élémentaire, on a bien :

$$(14.4.12) \quad \Gamma = \underline{\omega} \cdot \underline{n} \delta S = \text{const.}$$

Remarque -

Rappelons que d'après la **première loi d'Helmholtz**, cette circulation caractérise tout le tube de vorticité.

Ainsi, comme déjà remarqué plus haut, au cours du transport par l'écoulement du tube élémentaire de vorticité, toute **variation de la section transversale** δS de ce tube, sous l'effet d'une contraction ou d'un étirement du fluide qu'il contient, s'accompagne d'une **variation de proportion inverse de sa vorticité** $\underline{\omega}$.

Notons enfin que la circulation peut être interprétée comme une **densité massique de moment cinétique** (ou de **moment angulaire**). Sa conservation (14.4.12) peut s'interpréter alors comme la conservation du moment cinétique dont une image classique est celle du patineur qui module son taux de rotation en regroupant ou en écartant ses membres, cf. figure 14.6 ci-dessous. En effet, si l'on considère le cas simple d'une masse unitaire de moment d'inertie I tournant autour d'un axe d'orientation fixe avec un taux de rotation $\dot{\theta}$, la conservation du moment cinétique s'écrit $I \dot{\theta} = \text{const.}$. Dans la relation (14.4.12) la vorticité $\underline{\omega} \cdot \underline{n}$ correspond au double du taux de rotation Ω , le moment d'inertie I par unité de masse de l'élément de tube cylindrique étant quant à lui proportionnel à δS .

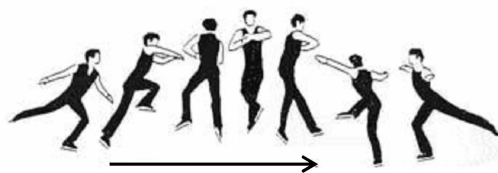


Figure 14.6 - Conservation du moment cinétique : l'exemple du patineur.

14.5 La distorsion de la vorticité : contraction, étirement et gauchissement

Nous allons maintenant analyser les mécanismes de distorsion de $\underline{\omega}$ représentés par le second membre de l'équation (14.4.1). Pour simplifier, on consid rera le cas d'un **fluide parfait incompressible homogène sans force extérieure**. On a dans ce cas :

$$(14.5.1) \quad \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega}$$

➤ Contraction-étirement et gauchissement

Conformément à la figure 14.7 ci-dessous, on introduit un **repère fixe** de coordonnées $(O, \underline{e}_s, \underline{e}_n, \underline{e}_b)$ tel que \underline{e}_s soit aligné en un point O avec la vorticité $\underline{\omega}$ d'un écoulement permanent. Ici \underline{e}_n définit la normale principale locale. Les champs de vitesse et vorticité sont notés :

$$(14.5.2) \quad \begin{cases} \underline{u} = u_s \underline{e}_s + u_n \underline{e}_n + u_b \underline{e}_b \\ \underline{\omega} = \omega_s \underline{e}_s + \omega_n \underline{e}_n + \omega_b \underline{e}_b \end{cases}$$

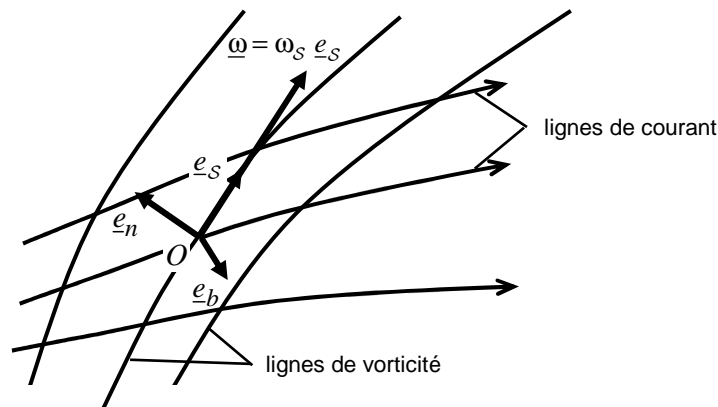


Figure 14.7 - Repère fixe $(O, \underline{e}_s, \underline{e}_n, \underline{e}_b)$ aligné avec le vecteur vorticité dans un écoulement permanent : définitions.

Au point O, par définition, la vorticité vaut :

$$(14.5.3) \quad \underline{\omega}(O) = \omega_s \underline{e}_s$$

Pour le second membre de (15.5.1) on obtient alors au point O :

$$(14.5.4) \quad \nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \right) \cdot \left(\omega_s \underline{e}_s \right) = \omega_s \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \delta_{js} = \omega_s \frac{\partial u}{\partial s}$$

L'équation (14.5.1) peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$(14.5.5) \quad \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \omega_s \frac{\partial \underline{u}}{\partial s} = \underbrace{\omega_s \frac{\partial u_s}{\partial s} \underline{e}_s}_{\text{contraction-étirement}} + \underbrace{\omega_s \frac{\partial u_n}{\partial s} \underline{e}_n + \omega_s \frac{\partial u_b}{\partial s} \underline{e}_b}_{\text{gauchissement}}$$

Soit, composante par composante :

$$(14.5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_s}{dt} = \omega_s \frac{\partial u_s}{\partial s} \\ \frac{d\omega_n}{dt} = \omega_s \frac{\partial u_n}{\partial s} \\ \frac{d\omega_b}{dt} = \omega_s \frac{\partial u_b}{\partial s} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{- contraction - étirement} \\ \text{- gauchissement} \end{array}$$

La première équation ci-dessus, où l'on reconnaît au second membre le **taux d'élongation unitaire** dans la direction s , $\partial u_s / \partial s$ cf. (2.9.4), correspond au mécanisme de **contraction-étirement** (*vortex stretching*, en anglais, expression qui privilégie l'étirement). Ce mécanisme conduit à l'intensification de la vorticité dans une élongation de taux $\partial u_s / \partial s > 0$, ou à sa réduction dans une contraction de taux $\partial u_s / \partial s < 0$. Comme illustré plus loin, cela correspond à la conservation du moment angulaire que traduit la conservation de la circulation (14.4.12).

Les deux dernières équations (14.5.6) traduisent quant à elles la création de composantes ω_n et ω_b normales à la vorticité initiale $\omega_s \underline{e}_s$ sous l'effet d'un champ de vitesse correspondant à un glissement. Par exemple, dans le cas de la figure 14.7 le pivotement du vecteur $\underline{\omega}$ autour du vecteur binormal \underline{e}_b génère une composante ω_n de la vorticité le long de cet axe (ici cette composante est négative). Ce mécanisme porte le nom de **gauchissement** de la vorticité (*vortex tilting* ou *vortex twisting*, en anglais).

➤ Dynamique linéaire : distorsion d'un tube de vorticité individuelle

Par nature, le second membre de l'équation d'Helmholtz (14.4.1), ou celui de sa version incompressible (14.5.1), est non-linéaire. En effet, il met en jeu l'ensemble de la boucle d'interaction de la figure 14.1 : \underline{u} modifie $\underline{\omega}$, et $\underline{\omega}$ modifie \underline{u} . Pour isoler le comportement de la vorticité $\underline{\omega}$, il faut **linéariser** le problème. Pour cela, il faut considérer un tube de **vorticité individuelle d'intensité infinitésimale**. C'est ce que nous allons supposer ici. Cela va nous permettre de mieux éclairer les mécanismes d'étirement et de gauchissement identifiés dans le système d'équation (14.5.6). En effet, on peut alors faire l'hypothèse que la vorticité $\underline{\omega}$ de ce tube de vorticité infinitésimale se comporte de manière **passive**, c.- -d. qu'elle ne modifie pas de manière significative le champ de vitesse \underline{u} de l'écoulement dans lequel elle est transportée. Cela permet d'isoler la branche supérieure $\underline{u} \rightarrow \underline{\omega}$ de la figure 14.1, tout en négligeant l'effet de la seconde $\underline{\omega} \rightarrow \underline{u}$. Comme montré dans l'approfondissement ci-dessous, cette approximation est bien justifiée si l'écoulement qui transporte le tube de vorticité est un écoulement irrotationnel.

*Approfondissement * - La linéarisation de l'équation d'Helmholtz*

Nous avons démontré dans le paragraphe 14.4 que dans un fluide parfait barotrope où les forces volumiques dérivent d'un potentiel, la vorticité se comporte comme un élément matériel tangent, cf. (14.4.5). Mais contrairement à un élément matériel, la vorticité n'est pas « passive » : elle rétroagit sur le champ de vitesse. Cela traduit la non-linéarité intrinsèque de l'équation d'Helmholtz (qui, rappelons le, est l'équation de Navier-Stokes « vue » à travers le filtre de l'opérateur rotationnel). On cherche alors les conditions dans lesquelles l'influence de $\underline{\omega}$ sur \underline{u} peut être négligée. On pose pour cela : $\underline{u} = \underline{u}_0 + \varepsilon \underline{u}_1$, $\underline{\omega} = \varepsilon \underline{\omega}_1$, où $\varepsilon \ll 1$, et où l'on suppose que $\underline{u}_0, \underline{u}_1$ et $\underline{\omega}_1 = \text{rot}(\underline{u}_1)$ sont d'ordre 1. La vitesse \underline{u}_0 caractérise le **champ de base**, que l'on suppose **irrotationnel**, sur lequel on superpose le tube de vorticité infinitésimale. Les champs $\varepsilon \underline{u}_1$ et $\varepsilon \underline{\omega}_1$ caractérisent ce tube de vorticité. En remplaçant dans l'équation (14.5.1) \underline{u} et $\underline{\omega}$ par leurs décompositions et en regroupant les termes de même ordre, il vient : $\varepsilon \left[\frac{\partial \underline{\omega}_1}{\partial t} + \nabla \underline{\omega}_1 \cdot \underline{u}_0 \right] + \varepsilon^2 \nabla \underline{\omega}_1 \cdot \underline{u}_1 = \varepsilon \nabla \underline{u}_0 \cdot \underline{\omega}_1 + \varepsilon^2 \nabla \underline{u}_1 \cdot \underline{\omega}_1$. Le champ des perturbations associées au tube de vorticité infinitésimale vérifie donc : $\frac{\partial \underline{\omega}_1}{\partial t} + \nabla \underline{\omega}_1 \cdot \underline{u}_0 = \nabla \underline{u}_0 \cdot \underline{\omega}_1 + O(\varepsilon)$. Si l'on néglige les termes d'ordre ε dans cette dernière équation, on obtient : $d_0 \underline{\omega}_1 / dt = \nabla \underline{u}_0 \cdot \underline{\omega}_1$ où $d_0 \underline{\omega}_1 / dt = \frac{\partial \underline{\omega}_1}{\partial t} + \nabla \underline{\omega}_1 \cdot \underline{u}_0$ définit la dérivée matérielle de $\underline{\omega}_1$ en suivant le champ de base \underline{u}_0 . Dans ce cadre d'hypothèses, la vorticité portée par le tube de vorticité infinitésimale est donc régie par une équation d'Helmholtz autonome qui traduit l'effet du champ de base \underline{u}_0 sur ce tube.

➤ Contraction-étirement : exemple

La première situation que nous allons considérer est celle de la figure 14.8. Il s'agit d'un écoulement **permanent bidimensionnel irrotationnel de fluide parfait incompressible homogène** dans un tube de courant plan convergent-divergent symétrique.

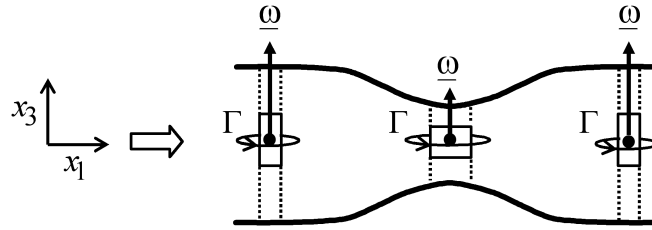


Figure 14.8 - Contraction et étirement d'un tube de vorticité dans un tube de courant convergent-divergent. Si, comme supposé dans cette figure, le fluide est un fluide parfait incompressible homogène (ici sans force de volume), d'après le théorème de Kelvin la circulation Γ reste constante au cours de ces transformations.

On pose pour la vitesse de cet écoulement :

$$(14.5.7) \quad \underline{U}(x_1, x_3) = U_1 \underline{e}_1 + U_3 \underline{e}_3$$

Remarque -

Le champ \underline{U} correspond au champ de base \underline{u}_0 dans l'approfondissement ci-dessus. Cette nouvelle notation permet d'éviter de cumuler deux indices.

On suppose que cet écoulement transporte un tube de vorticité d'intensité infinitésimale orienté initialement selon \underline{e}_3 , soit :

$$(14.5.8) \quad \underline{\omega}(t=0) = \omega_3 \underline{e}_3$$

Dans la première partie du tube de courant le tube de vorticité subit une **contraction** : sa section augmente, donc la vorticité diminue. L'évolution s'inverse dans l'élargissement de la conduite où le tube de vorticité subit un ** tirement**. En l'absence de phénomènes visqueux, l'écoulement est réversible et vérifie une symétrie amont-aval.

Les équations qui décrivent cette situation s'établissent comme suit. On se place dans le **plan de symétrie** $x_3 = 0$ de la conduite, où :

$$(14.5.9) \quad \begin{cases} \underline{U}(x_1, 0) = U_1 \underline{e}_1 \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3}(x_1, 0) = 0 \end{cases}$$

On vérifie bien le caractère irrotationnel de l'écoulement dans ce plan, puisque :

$$(14.5.10) \quad \underline{rot U}(x_1, 0) = \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} = 0 + 0 = 0$$

La continuité implique que :

$$(14.5.11) \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0$$

Dans le plan de symétrie $x_3 = 0$, l'équation d'Helmholtz (14.5.1) donne :

$$(14.5.12) \quad \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \nabla U \cdot \underline{\omega} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \omega_1 + \cancel{\frac{\partial U_1}{\partial x_3}} \omega_3 \right) \underline{e}_1 + \left(\cancel{\frac{\partial U_3}{\partial x_1}} \omega_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \omega_3 \right) \underline{e}_3$$

où les termes barr s tiennent compte de (15.5.9). Pour les deux composantes de la vorticité, on obtient donc le système suivant :

$$(14.5.13) \quad \begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \omega_1 \\ \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \omega_3 = -\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \omega_3 \end{cases}$$

où l'on a utilisé la continuité (14.5.11) pour transformer le second membre de la seconde équation. La première équation stipule que si ω_1 est nul initialement, il le demeure. La seconde équation montre que la vorticité $\omega_3 = \|\underline{\omega}\|$ diminue dans la partie contractée du tube de courant où l'écoulement isovolume accélère ($\partial U_1 / \partial x_1 > 0$) et augmente dans la partie dilatée ($\partial U_1 / \partial x_1 < 0$). Par ailleurs, conformément au théorème de Kelvin, la circulation du tube de vorticité étant conservée, la contraction du tube engendre donc à la fois une diminution de son intensité $\underline{\omega}$ et une augmentation de son épaisseur. Cela est schématisé sur la figure 14.8. Dans l'élargissement du tube de courant, cette variation s'inverse.

On note alors, et c'est un fait important, que ce mécanisme de contraction-étirement induit un **comportement exponentiel** de $\underline{\omega}$. En effet, en adoptant un formalisme lagrangien, l'intégration du système (14.5.13) donne :

$$(14.5.14) \quad \begin{cases} \omega_1(t) = \overbrace{\omega_1(t=0)}^{=0} e^{\int_0^t (\partial U_1 / \partial x_1) t' dt'} = 0 \\ \omega_3(t) = \omega_3(t=0) e^{\int_0^t (\partial U_3 / \partial x_3) t' dt'} \end{cases}$$

où $\underline{\omega}(t=0)$ correspond aux conditions à l'entrée du tube de courant dans le plan $x_3 = 0$. En l'absence de tout mécanisme autre que la distorsion, la symétrie amont-aval de la conduite de la figure 14.8 fait que l'on retrouve la vorticité initiale au bout du cycle contraction-étirement. Ces variations exponentielles de la vorticité alignée avec un axe de contraction ou d'étirement caractérisent donc le mécanisme de **contraction-étirement** de la vorticité (*vortex stretching*) introduit plus haut.

Le mécanisme d'étirement joue un rôle fondamental en dynamique des fluides car si de la vorticité, même résiduelle, s'aligne avec un champ d'étirement, elle augmente de manière « explosive » (exponentielle). Elle peut alors rétroagir sur le champ de vitesse, et cela peut modifier de manière spectaculaire les propriétés générales de l'écoulement (il s'agit alors d'une situation non-linéaire qui met en jeu l'ensemble de la boucle d'interaction de la figure 14.1). Nous illustrons cela plus loin (dans un approfondissement) avec l'exemple de la génération d'écoulements secondaires dans une conduite.

➤ Gauchissement : exemple

La seconde situation est celle schématisée sur la figure 14.9. On considère toujours un écoulement **permanent bidimensionnel irrotationnel de fluide parfait incompressible homogène** dans lequel se trouve un tube de vorticité orienté verticalement à un instant t . Cette fois-ci, l'écoulement, de vitesse $U(x_1, x_3) = U_1 \underline{e}_1 + U_3 \underline{e}_3$ est cisailé, son taux de cisaillement valant $\partial U_1 / \partial x_3$   l'instant t .

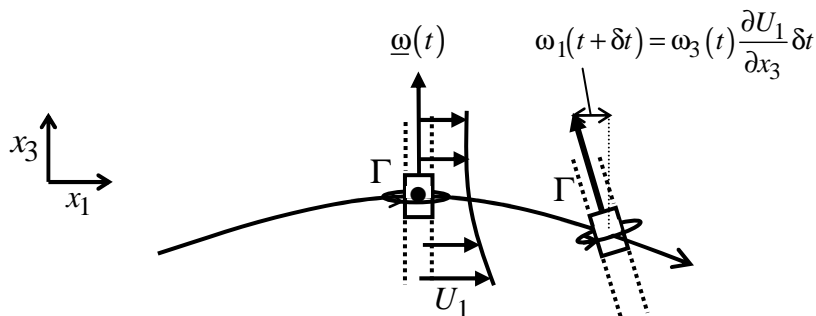


Figure 14.9 - Gauchissement d'un tube de vorticité dans un écoulement bidimensionnel cisailé irrotationnel. Le basculement de la vorticité par le cisaillement crée une composante de vorticité ω_1 dans la direction normale à la vorticité initiale. Si, comme supposé dans cette figure, le fluide est un fluide parfait incompressible homogène (ici sans force de volume), d'après le théorème de Kelvin la circulation Γ reste constante au cours de cette transformation.

L'équation d'Helmholtz (14.5.1) doit être considérée ici sous sa forme complète :

$$(14.5.15) \quad \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \nabla \underline{U} \cdot \underline{\omega} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \omega_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \omega_3 \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \omega_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \omega_3 \right) \underline{e}_3$$

Pour les deux composantes de la vorticité on obtient donc le système suivant :

$$(14.5.16) \quad \begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt} = \overbrace{\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \omega_1}^{\text{contraction-}\bracket{étirement}} + \overbrace{\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \omega_3}^{\text{gauchissement}} \\ \frac{d\omega_3}{dt} = \underbrace{\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \omega_1}_{\text{gauchissement}} + \underbrace{\frac{\partial U_3}{\partial x_3} \omega_3}_{\text{contraction-}\bracket{étirement}} \end{cases}$$

où l'on a identifié les termes de contraction-étirement et de gauchissement. Concentrons-nous sur la première équation :   l'instant t considéré la composante horizontale ω_1 de la vorticité étant nulle seul le second terme du second membre agit. Le cisaillement local $\partial U_1/\partial x_3$ « penche » le tube de vorticité en produisant une composante horizontale ω_1 . Ce mécanisme correspond à l'équation :

$$(14.5.17) \quad \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \omega_3$$

C'est le **gauchissement** de la vorticité (*vortex tilting* ou *vortex twisting*) vu plus haut. Entre l'instant t et l'instant $t + \delta t$, la composante ω_1 ainsi créée vaut :

$$(14.5.18) \quad \omega_1(t + \delta t) = \omega_3(t) \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \delta t$$

➤ Approfondissement ** - écoulements secondaires dans une conduite coudée

Voici une application intéressante qui va nous permettre de réviser les mécanismes de distorsion de la vorticité enseignés dans ce paragraphe, ainsi que les principales notions sur le fluide parfait enseignées depuis le **chapitre 11**. Il s'agit de l'écoulement dans une conduite coudée représenté sur la figure **14.10**.

Ce problème a déjà été abordé au **chapitre 6** au moyen de l'outil des bilans dans les volumes de contrôle, cf. figure **6.4**.

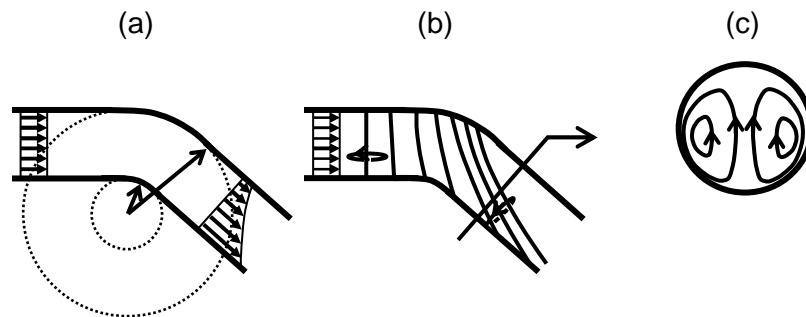


Figure 14.10 - Ecoulements secondaires dans une conduite coudée : mécanismes. (a) Champ de vitesse irrotationnel dans le plan de symétrie de la conduite. (b) vues à divers instants d'un tube élémentaire de vorticité transport  par l'écoulement de la figure (a) : effets de gauchissement et d'étirement. (c) Schématisation de la formation d'un couple de tourbillons à l'aval du coude dans une conduite cylindrique (la mise en rotation de la totalité de l'écoulement dans chaque demi section de la conduite traduit la vitesse d'induction de **Biot-Savart** explicitée plus bas dans ce chapitre).

On suppose que dans la conduite l'écoulement est permanent, que le fluide est incompressible homogène et qu'il n'y a pas de force de volume. Comme figuré sur la figure **14.10 (a)** l'écoulement est supposé uniforme dans la section d'entrée de la conduite. Il est donc initialement irrotationnel. Compte tenu des hypothèses ci-dessus, le **théorème de Lagrange** garantit que cet écoulement demeure irrotationnel dans toute la conduite.

Le **théorème de la pression** enseigné au **chapitre 11** stipule alors que, du fait de la courbure des lignes de courant dans le coude de la conduite, cf. figure **14.10 (a)**, il s'établit un gradient de pression radial positif. En effet, la pression dans la partie inférieure du coude (vers les centres des courbures) est inférieure à la pression dans la partie supérieure. Par conséquent, d'après le **premier théorème de Bernoulli**, partant d'une pression uniforme à l'entrée de la conduite, l'écoulement le long des lignes de courant proches de la partie inférieure de la conduite est plus rapide que celui le long des lignes de courant proches de la partie supérieure. On obtient ainsi un profil de vitesse cisaille tel que figuré sur la figure **14.10 (a)**.

Remarque -

Nous avons représenté ce profil dans un approfondissement du **chapitre 6**, cf. figure **6.6 (a)**. Nous y avons ajouté aussi l'effet de la condition d'adhérence qui engendre une région visqueuse cisaille e   proximité de la paroi de la conduite (couche limite).

Conformément à la figure **14.10 (b)**, tout tube de vorticité infinitésimal plongé dans l'écoulement de fluide parfait de la figure **14.10 (a)** subit un gauchissement consécutif au cisaillement de l'écoulement irrotationnel dans le coude. Mais il subit aussi un étirement du fait de l'accélération du fluide le long des lignes de courant situées dans la partie inférieure de la conduite. Or, dans une conduite réelle, l'écoulement près de la paroi de la conduite est rotationnel car le fluide est cisaille  du fait de l'adhérence (voir remarque ci-dessus). Cette région, qui est la couche limite, constitue une source de vorticité pour les mécanismes étudiés dans ce paragraphe. Les expériences mènent alors aux constats suivants :

- ✓ Les mécanismes de fluide parfait décrits ci-dessus agissent sur la vorticité contenue dans la région proche de la paroi : ils la gauchissent et l'étirent.
- ✓ Le résultat est une intensification exponentielle de la vorticité alignée avec l'écoulement près des parois latérales à l'aval du coude, cela jusqu'à former une paire de tourbillons contrarotatifs.
- ✓ Ces tourbillons de signes opposés entrainent par induction tout le fluide de la conduite jusqu'à former deux régions tournantes, comme schématisé sur la figure 14.10 (c). Ce mécanisme d'induction caractérise l'effet de $\underline{\omega}$ sur \underline{u} et il fait référence à la branche inférieure de la figure 14.1. Il correspond à la loi de Biot-Savart détaillée ci-dessous dans le corps du texte.

Ces structures tournantes transversales qui se superposent ainsi à l'écoulement débitant le long le d'axe de la conduite portent le nom d'** coulements secondaires**.

Remarques -

- Comme discuté dans l'approfondissement du **chapitre 6**  voqu  plus haut, si l'on veut obtenir un écoulement à peu près uniforme après le coude, il convient d'introduire dans la région du coude des systèmes perturbateurs qui contrarient cette organisation rotative de l'écoulement, cf. figure 6.6 (b).
- Les écoulements secondaires sont essentiels pour la compréhension de l'organisation des écoulements obtenus dans de nombreuses applications de la mécanique des fluides. C'est notamment le cas dans le domaine des turbomachines où les écoulements sont soumis à des gradients de pression transversaux violents, visant à dévier la quantité de mouvement, comme dans le cas d'une conduite coudée que nous venons d'étudier.

14.6 L'effet de la vorticité sur le champ de vitesse : la loi d'induction de Biot-Savart

Nous allons nous intéresser maintenant à la branche $\underline{u} = \underline{rot}^{-1}(\underline{\omega})$ de la figure 14.1, c.- -d.   la façon dont un champ de vorticité met en mouvement le fluide qui l'environne. C'est le phénomène d'**induction** de la vorticité sur la vitesse du fluide.

Avertissement -

La démonstration générale qui va suivre est un peu fastidieuse. Elle reproduit une démarche classique en physique (en électromagnétisme notamment). Elle est donnée ici dans le corps du texte (et non pas comme approfondissement) car elle fait partie du corpus de théorèmes qui fondent la mécanique des fluides. On se concentrera alors surtout sur ses deux applications que nous illustrons ensuite : le tourbillon filament et la nappe de vorticité isolée.

On considère un écoulement de **fluide incompressible occupant tout l'espace**. On suppose que le champ du rotationnel $\underline{\omega}(\underline{x})$ de cet écoulement est non nul dans un domaine borné Ω .

Il s'agit de calculer dans tout l'espace le champ de vitesse $\underline{u}(\underline{x})$ satisfaisant les deux équations vectorielles suivantes :

$$(14.6.1) \quad \underline{rot} \, \underline{u} = \underline{\omega}$$

$$(14.6.2) \quad \underline{div} \, \underline{u} = 0$$

Compte tenu de (14.6.2) on introduit le **potentiel vecteur** \underline{A} tel que :

$$(14.6.3) \quad \underline{u} = \underline{rot} \, \underline{A},$$

L'unicité de \underline{A} est assurée si l'on impose la condition supplémentaire :

$$(14.6.4) \quad \underline{div} \, \underline{A} = 0,$$

En remplaçant (14.6.3) dans (14.6.1) on obtient :

$$(14.6.5) \quad \underline{rot}(\underline{rot} \, \underline{A}) = \underline{\omega}$$

L'identité vectorielle (cf. annexe A2.4) :

$$(14.6.6) \quad \underline{rot}(\underline{rot} \, \underline{A}) = \underline{grad}(\underline{div} \, \underline{A}) - \Delta \underline{A},$$

aboutit alors à l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur \underline{A} :

$$(14.6.7) \quad \boxed{\Delta \underline{A} = -\underline{\omega}}$$

La solution de cette équation s'appuie sur les résultats classiques suivants. La solution de l'équation scalaire :

$$(14.6.8) \quad \Delta \phi = f,$$

est générée par le noyau G , ou fonction de Green, solution de l'équation fondamentale :

$$(14.6.9) \quad \Delta G = \delta(\underline{x}) ,$$

Ce noyau vaut :

$$(14.6.10) \quad G(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi\|\underline{x}\|}$$

Il représente une source ponctuelle placée à l'origine. La solution de l'équation (14.6.8) est alors obtenue au moyen d'une convolution entre la fonction G et le second membre de cette équation :

$$(14.6.11) \quad \varphi(\underline{x}) = f * G = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{f(\underline{x}')}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|} d\Omega$$

Cette formule s'interprète comme le potentiel produit par une distribution de sources de densité volumique locale $f(\underline{x}')$. En appliquant (14.6.11)   chacune des composantes de l'équation vectorielle (14.6.7), on obtient :

$$(14.6.12) \quad \underline{A}(\underline{x}) = -\underline{\omega} * G = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\underline{\omega}(\underline{x}')}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|} d\Omega$$

En prenant le rotationnel de cette expression on obtient pour la vitesse $\underline{u}(\underline{x})$:

$$(14.6.13) \quad \underline{u}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \underline{rot}_{\underline{x}} \frac{\underline{\omega}(\underline{x}')}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|} d\Omega$$

On utilise alors de nouveau l'identité vectorielle (cf. annexe A2.4) déjà utilisé en (12.6.10) :

$$(14.6.14) \quad \underline{rot}_{\underline{x}}(a \underline{A}) = a \underline{rot}_{\underline{x}} \underline{A} + \underline{grad}_{\underline{x}}(a) \wedge \underline{A},$$

avec $a = 1/\|\underline{x} - \underline{x}'\|$ et $\underline{A} = \underline{\omega}(\underline{x}')$. D'où :

$$(14.6.15) \quad \underline{rot}_x \frac{\underline{\omega}(\underline{x}')}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|} = \underline{grad}_x \frac{1}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|} \wedge \underline{\omega}(\underline{x}'),$$

La relation (14.6.13) devient ainsi :

$$(14.6.16) \quad \underline{u}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \underline{grad}_x \left(\frac{1}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|} \right) \wedge \underline{\omega}(\underline{x}') d\Omega$$

Pour le gradient, on a :

$$(14.6.17) \quad \underline{grad}_x \left(\frac{1}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|} \right) = - \frac{\underline{grad}_x \|\underline{x} - \underline{x}'\|}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|^2} = - \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|^3}$$

D'où :

$$(14.6.18) \quad \boxed{\underline{u}(\underline{x}) = - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|^3} \wedge \underline{\omega}(\underline{x}') d\Omega}$$

C'est la **loi de Biot-Savart**. La solution (14.6.18)  tant une solution particulière des équations (14.6.1), (14.6.2), en toute généralité, il convient de lui rajouter une solution arbitraire du système homogène,

$$(14.6.19) \quad \begin{cases} \underline{rot} \underline{u} = 0 \\ \underline{div} \underline{u} = 0 \end{cases}$$

c.- -d. un champ irrotationnel quelconque $\underline{u} = \underline{grad} \varphi$ dérivant d'un potentiel φ solution de l'équation de Laplace :

$$(14.6.20) \quad \Delta \varphi = 0,$$

Dans le cas où l'écoulement occupe tout l'espace, on peut montrer que $\varphi = 0$. Le champ de vitesse est alors bien défini par (14.6.18). Par contre, dans le cas où l'écoulement occupe un domaine borné il convient en général d'ajouter au champ induit par la vorticité (14.6.18) un écoulement irrotationnel qui vérifie les conditions aux limites à la frontière du domaine, soit :

$$(14.6.21) \quad \underline{u}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|^3} \wedge \underline{\omega}(\underline{x}') d\Omega + \underline{\text{grad}} \varphi$$

14.7 Application : tourbillon filament et nappe de vorticité

Nous allons maintenant appliquer la formule (14.6.18) aux deux cas particuliers suivants :

- ✓ un **tourbillon filament** de fluide incompressible ;
- ✓ une **nappe de vorticité isolée** de fluide incompressible.

➤ Cas d'un tourbillon filament

Comme rappelé plus haut un **tourbillon** correspond à un tube de vorticité étroit plongé dans un écoulement irrotationnel. Le **tourbillon filament** correspond quant à lui à la ligne singulière obtenue en faisant tendre la section transversale du tourbillon vers zéro tout en maintenant la circulation Γ constante, cf. figure 2.26 (b). Comme schématisé sur la figure 14.11 ci-dessous, on considère un tronçon élémentaire de tourbillon, de volume $\delta\Omega$, correspondant à un tube cylindrique aligné avec la ligne tourbillon centrale L en un point \underline{x}' .

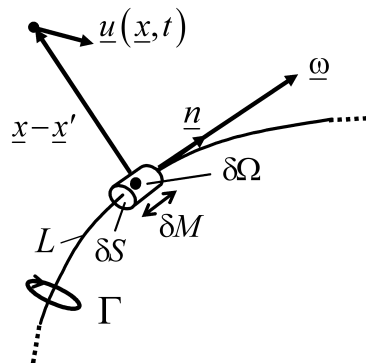


Figure 14.11 - Tourbillon filament et vitesse induite (loi de Biot-Savart) : définitions.

Si $\underline{\delta M}(\underline{x}') = \delta M(\underline{x}') \underline{n}$ désigne le vecteur matériel élémentaire tangent à la ligne tourbillon en \underline{x}' et si δS désigne l'aire de la section du tourbillon, on peut écrire :

$$(14.7.1) \quad \delta \Omega = \delta S \delta M$$

$$(14.7.2) \quad \underline{\omega} \delta \Omega = \underline{\omega} \delta S \delta M = (\underline{\omega} \cdot \underline{n} \delta S) \underline{n} \delta M = \Gamma \underline{\delta M}$$

où l'on a tenu compte de (14.4.12). En définitive, l'équation (14.6.18) devient :

$$(14.7.3) \quad \underline{u}(\underline{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{(\underline{x} - \underline{x}') \wedge \underline{dM}(\underline{x}')}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|^3}$$

C'est la **loi de Biot-Savart pour un tourbillon filament**.

➤ Cas d'un tourbillon filament rectiligne

Comme schématisé sur la figure 14.12 ci-dessous, dans le cas où le tourbillon filament est rectiligne et aligné avec l'axe Ox_3 , on a la relation :

$$(14.7.4) \quad \underline{dM}(\underline{x}') = dx_3 \underline{e}_3$$

En considérant par ailleurs un système de coordonnées cylindriques $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_3)$ attaché au point \underline{x} où l'on calcule la vitesse induite par le tourbillon filament, soit ici :

$$(14.7.5) \quad (\underline{x} - \underline{x}') \wedge \underline{dM}(\underline{x}') = -r dx_3 \underline{e}_\theta$$

L'équation (14.7.3) devient dans ce cas :

$$(14.7.6) \quad \underline{u}(\underline{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dx_3}{(r^2 + x_3^2)^{3/2}} \underline{e}_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dX}{(1 + X^2)^{3/2}} \underline{e}_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \underline{e}_\theta$$

Donc :

$$(14.7.7) \quad \underline{u}(\underline{x}) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \underline{e}_\theta$$

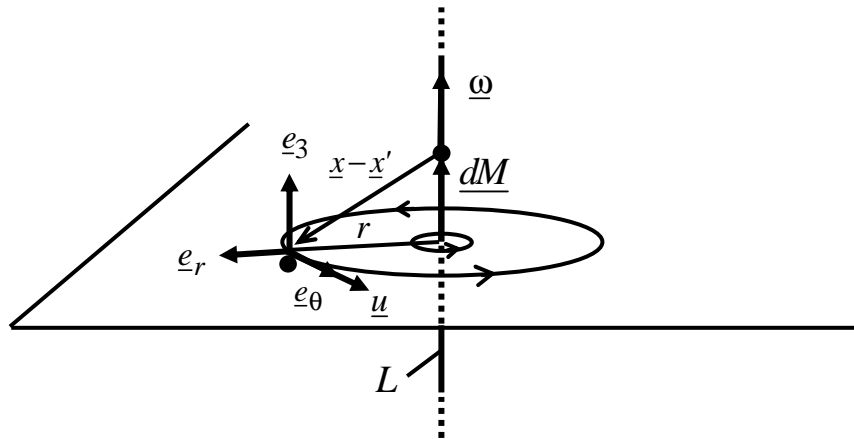


Figure 14.12 - Tourbillon filament rectiligne et vitesse induite (loi de Biot-Savart) : définitions.

On retrouve ici la loi de vitesse du **tourbillon ponctuel isolé** introduit au **chapitre 12**, cf. (12.4.10), et présenté de nouveau au **chapitre 13** comme solution élémentaire des écoulements potentiels, cf. (13.4.5). Ainsi :

Dans un écoulement bidimensionnel, le champ de vitesse induit par un tourbillon ponctuel correspond à celui d'un tourbillon filament rectiligne d'extension infinie perpendiculaire au plan de l'écoulement.

Rappelons que la vorticité de cet écoulement irrotationnel est une distribution de Dirac, cf. (12.4.13) :

$$(14.7.8) \quad \underline{\omega}(\underline{x}) = \Gamma \delta(\underline{x})$$

➤ Cas d'une nappe de vorticité isolée

Comme rappelé plus haut, une **nappe de vorticité** correspond à l'ensemble des lignes de vorticité s'appuyant sur une courbe. Il existe de nombreux écoulements que l'on peut

modéliser comme des écoulements irrotationnels sauf sur des **nappes de vorticité isolées**. À titre d'exemple, on schématise sur la figure **14.13** ci-dessous le cas d'un écoulement produit à l'aval d'une plaque plane d'épaisseur nulle, dans lequel se forme une nappe de vorticité libre S séparant l'écoulement provenant de l'amont et une région de fluide au repos située au-dessous de la nappe.

Cette situation est d'un grand intérêt pratique car elle représente une idéalisation au sens du fluide parfait de deux grandes familles d'écoulements que l'on rencontre dans les applications, à savoir :

- ✓ les **couches de mélange**, qui correspondent à l'interface entre deux écoulements parallèles de propriétés différentes, notamment les jets ;
- ✓ les **couches limites**, qui correspondent à la région de contact entre un fluide et un solide.

Remarque -

Nous consacrerons le prochain chapitre à ce dernier écoulement.

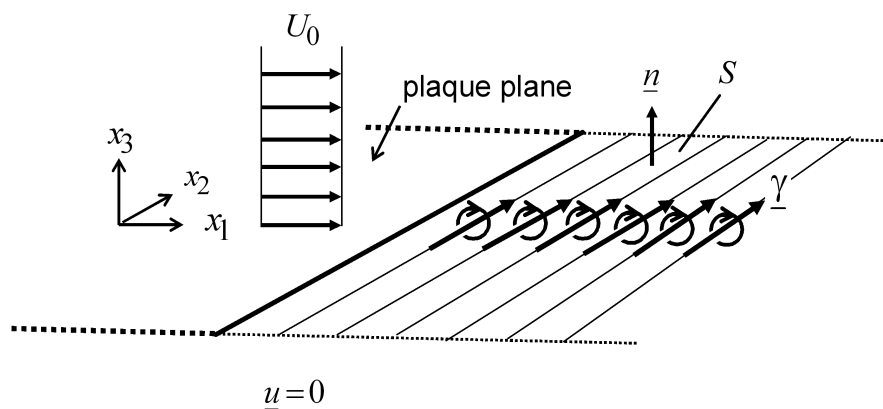


Figure 14.13 - Nappe de vorticité isolée engendrée par un écoulement irrotationnel à l'aval d'une plaque plane d'épaisseur nulle.

Dans le cadre du modèle de fluide parfait, ces deux problèmes se ramènent à une concentration singulière, ici surfacique, de vorticité, que l'on qualifiera de **nappe de vorticité isolée**. Notons que l'on peut remplacer la plaque solide de la figure **14.13** par le prolongement de la nappe de vorticité représentée à l'aval, sans changer la nature du champ de vitesse qui est ici un champ uniforme dans le demi-espace $x_3 \geq 0$.

Nous allons formaliser ici cette notion de nappe de vorticité isolée. On considère pour cela en tout point \underline{x}' de S le **vecteur densité surfacique de vorticité** $\underline{\gamma}(\underline{x}')$ tel que :

$$(14.7.9) \quad \underline{\omega} \delta\Omega = \underline{\gamma} \delta S$$

En remplaçant cette expression dans la loi de Biot-Savart (14.6.18), on obtient :

$$(14.7.10) \quad \underline{u}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|^3} \wedge \underline{\gamma}(\underline{x}') dS$$

Enfin, notons qu'une nappe de vorticité se ramène à une discontinuité de vitesse. En effet, en faisant appel à la théorie des distributions, si l'on suppose qu'il existe un saut de vitesse $\llbracket \underline{u} \rrbracket$ en tout point d'une surface S , le rotationnel peut être défini comme :

$$(14.7.11) \quad \underline{\omega} = \underline{rot} \underline{u} + \underline{n} \wedge \llbracket \underline{u} \rrbracket \delta_S$$

où δ_S désigne la distribution de Dirac sur S et où $\underline{rot} \underline{u}$ est le rotationnel au sens des fonctions usuelles. Pour un écoulement irrotationnel cela donne :

$$(14.7.12) \quad \underline{\omega} = \underline{n} \wedge \llbracket \underline{u} \rrbracket \delta_S$$

où $\delta_S = \delta(x_3)$ dans les conventions de la figure 14.13. Soit, en introduisant cette expression dans la loi de Biot-Savart (14.6.18) :

$$(14.7.13) \quad \underline{u}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|^3} \wedge (\underline{n} \wedge \llbracket \underline{u} \rrbracket)(\underline{x}') dS$$

D'où, par comparaison avec (14.7.10) :

$$(14.7.14) \quad \boxed{\underline{\gamma} = \underline{n} \wedge \llbracket \underline{u} \rrbracket}$$

Dans ces relations, le saut $\llbracket \underline{u} \rrbracket$ doit être compris comme la différence entre la vitesse « au-dessus de S » et la vitesse « au-dessous de S » dans le sens de l'orientation de la normale \underline{n} que l'on a choisie. Pour l'exemple de la figure 14.13 cela donne :

$$(14.7.15) \quad \underline{\gamma} = \underline{n} \wedge \llbracket \underline{u} \rrbracket = \underline{e}_3 \wedge (U_0 \underline{e}_1 - 0) = U_0 \underline{e}_2$$

14.8 Approfondissement ** - Stationnarité d'interfaces : théorie

➤ Introduction

Dans ce long approfondissement « 2 étoiles » nous allons développer les aspects théoriques d'une application des éléments de ce chapitre sur la vorticité. Comme schématisé sur la figure 14.14 ci-dessous, il s'agit du comportement de la surface de contact entre deux écoulements parallèles de masses volumiques et/ou de vitesses différentes. Cette situation recouvre notamment deux types de problèmes :

- ✓ dans le cas où les deux écoulements ont la même masse volumique mais possède des vitesses différentes, la surface de contact est une **surface de vorticité isolée** ;
- ✓ dans le cas où les vitesses sont égales et les masses volumiques différentes, on se trouve alors en présence d'une **surface de contact irrotationnelle** entre deux fluides non-miscibles.

La théorie que nous allons développer comprend aussi tout cas intermédiaire mêlant des différences de densités et de vitesses.

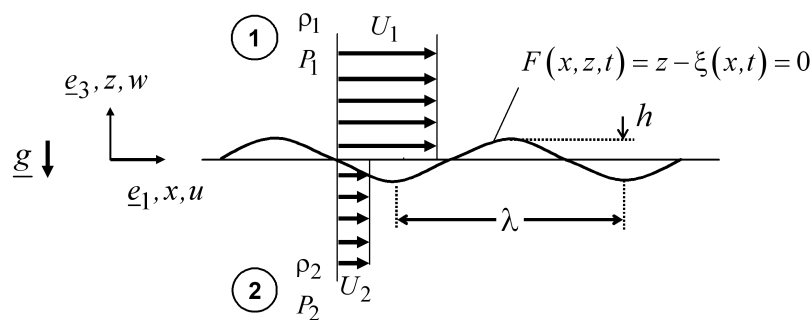


Figure 14.14 - Stationnarité d'interfaces : définitions

On montre que les deux problèmes listés ci-dessus admettent une solution générale unique sous la forme d'ondes propagatives dont certaines peuvent être **instables** au sens où elles sont amplifiées.

L'écoulement devient alors instationnaire puis turbulent. Les équations qui décrivent ce régime d'ondes sont basées sur deux notions enseignées dans les chapitres précédents, à savoir :

- ✓ les **conditions aux limites cinématiques** et **dynamiques** sur une surface de contact vues au **chapitre 7** pour le fluide newtonien, et au **chapitre 8** pour le fluide parfait ;
- ✓ le **deuxième théorème de Bernoulli** vu au chapitre précédent.

Ce problème permet donc de réviser ces notions clefs. Par ailleurs, nous allons voir qu'il décrit des phénomènes très concrets et d'une grande portée fondamentale et applicative, tels que la houle et l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Nous analyserons ce second problème au moyen d'arguments plus heuristiques dans le corps du texte au prochain paragraphe.

➤ Les  quations

Conformément à la figure **14.14** ci-dessus, on considère deux écoulements de fluides **pesants**, **incompressibles**, **homogènes** et **non miscibles**, occupant respectivement deux demi-espaces infinis séparés par une interface. Ces deux écoulements sont supposés **bidimensionnels**, c.- -d. invariants dans la direction normale au plan de la figure **14.14**.

On définit alors l'** tat initial**, ou ** tat de base**, comme étant celui correspondant à un écoulement horizontal **stationnaire** de vitesse U_1 au-dessus d'un écoulement horizontal **stationnaire** de vitesse U_2 . On note ρ_1 , ρ_2 les masses volumiques respectives de ces deux écoulements, et P_1 , P_2 leurs pressions.

Si $U_1 \neq U_2$, la surface de contact, supposée d'épaisseur nulle, correspond à une nappe de vorticité isolée telle que définie dans le paragraphe précédent, cf. figure **14.13**. Par voie de conséquence, les deux écoulements peuvent être considérés comme des ** coulements de fluide parfait irrotationnels**. Par ailleurs, puisque les deux fluides en présence sont supposés **incompressibles** et **homogènes**, ils sont donc **barotropes** et nous pouvons donc les décrire à l'aide de deux potentiels de vitesse, que l'on notera $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_2$ et qui vérifient tous deux une équation de Laplace :

$$(14.8.1) \quad \begin{cases} \Delta \tilde{\phi}_1 = 0 \\ \Delta \tilde{\phi}_2 = 0 \end{cases}$$

On suppose alors que la surface de contact qui sépare les deux écoulements devient naturellement instationnaire au cours du temps, animée d'un mouvement vertical sinusoïdal d'amplitude ξ et de longueur d'onde λ . Comme indiqué sur la figure **14.14**, on définit cette surface par l'équation :

$$(14.8.2) \quad F(x, z, t) = z - \xi(x, t) = 0 \quad \text{- équation de l'interface}$$

Le caractère sinusoïdal de ξ sera pris en compte plus tard. On considère alors que ce mouvement de l'interface est une **petite perturbation** de l'état initial. En l'absence de toute échelle de longueur autre

que celles introduites par le mouvement de la perturbation lui-même, cette hypothèse de petite perturbation peut se traduire au niveau des excursions verticales $\xi(x, t)$ de l'interface par la condition :

$$(14.8.3) \quad \begin{cases} \xi \sim h \\ h/\lambda = \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

où h désigne l'amplitude de l'onde et λ , sa longueur d'onde, cf. figure 14.14. Pour le champ de vitesse et pour son potentiel dans le repère de coordonnées défini sur la figure 14.14, on posera alors :

$$(14.8.4) \quad \begin{cases} \tilde{\varphi}_1 = U_1 x + \varphi_1 \\ \tilde{\varphi}_2 = U_2 x + \varphi_2 \end{cases}$$

En remplaçant (14.8.4) dans (14.8.1), on voit que les deux **potentiels perturbatifs** φ_1, φ_2 vérifient aussi l'équation de Laplace :

$$(14.8.5) \quad \begin{cases} \Delta \varphi_1 = 0 \\ \Delta \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

➤ Conditions aux limites à l'infini

On fait alors l'hypothèse que ces perturbations sont évanescentes dans le champ lointain. Cela introduit les deux conditions aux limites suivantes :

$$(14.8.6) \quad \begin{cases} \varphi_1 \rightarrow 0 \text{ pour } z \rightarrow \infty \\ \varphi_2 \rightarrow 0 \text{ pour } z \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Remarque -

Ces deux fonctions tendent en fait vers deux constantes que nous posons égales à zéro sans perte de généralité.

➤ Conditions cinématiques

Les autres conditions aux limites qu'il convient d'appliquer concernent la valeur des deux fonctions φ_1, φ_2 de part et d'autre de l'interface. Il s'agit donc de traduire pour le potentiel des vitesses les conditions du fluide parfait à l'interface entre deux fluides non-miscibles données en (8.4.14) et (8.4.15). Ces deux conditions, qui sont équivalentes, traduisent l'absence de flux de masse à travers l'interface. La seconde condition, la **condition cinématique**, traduit le caractère matériel de l'interface. Elle prend ici la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 (14.8.7) \quad & \left(\frac{dF}{dt} \right)_1 = \frac{\partial F}{\partial t} + (U_1 e_1 + \underline{\text{grad}} \varphi_1) \cdot \underline{\text{grad}} F \\
 & = \left(\frac{dF}{dt} \right)_2 = \frac{\partial F}{\partial t} + (U_2 e_1 + \underline{\text{grad}} \varphi_2) \cdot \underline{\text{grad}} F = 0
 \end{aligned}$$

L'équation de l'interface F est définie en (14.8.2). En remplaçant, on obtient :

$$(14.8.8) \quad \text{en } z = \xi : \begin{cases} \left(\frac{dF}{dt} \right)_1 = -\frac{\partial \xi}{\partial t} - \left(U_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \\ \left(\frac{dF}{dt} \right)_2 = -\frac{\partial \xi}{\partial t} - \left(U_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$(14.8.9) \quad \text{en } z = \xi : \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(U_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(U_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{cases}$$

On exploite alors l'**hypothèse de petites perturbations (14.8.3)** en appliquant la condition cinématique ci-dessus en $z = 0$ et en éliminant les produits de termes perturbatifs. On obtient ainsi :

$$(14.8.10) \quad \text{en } z = 0 : \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{cases}$$

➤ Condition dynamique et deuxième théorème de Bernoulli

La seconde condition aux limites qui caractérise l'interface est la condition dynamique qui exprime la conservation de la contrainte à travers une interface entre deux écoulements. Pour le fluide parfait cette condition se résume à la conservation de la pression dans la mesure où l'on **néglige les effets de tension superficielle**, cf. (8.4.16). On distinguera ce faisant les deux pressions de l'écoulement de base, notées P_1, P_2 , et celles du champ perturbatif, notées p_1, p_2 .

C'est à ce stade que nous avons besoin de faire appel au **deuxième théorème de Bernoulli**. Chacun des deux écoulements étant irrotationnel et le fluide étant incompressible et homogène, donc barotrope, on peut en effet appliquer ce théorème. La version de ce théorème qui nous intéresse ici est la relation (13.2.5) qui s'applique aux écoulements potentiels (fluide parfait incompressible homogène) :

$$(14.8.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{P_1 + p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} (U_1 e_1 + \underline{\text{grad}} \phi_1)^2 + gz = C_1(t) & \text{pour } z \geq \xi \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{P_2 + p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} (U_2 e_1 + \underline{\text{grad}} \phi_2)^2 + gz = C_2(t) & \text{pour } z \leq \xi \end{cases}$$

En $z = 0$, après élimination des termes du deuxième ordre vis-à-vis des perturbations, on obtient :

$$(14.8.12) \quad \text{en } z = 0 : \begin{cases} P_1 + p_1 \approx \rho_1 \left[C_1(t) - \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} U_1^2 - U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - g\xi \right] \\ = P_2 + p_2 \approx \rho_2 \left[C_2(t) - \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} U_2^2 - U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - g\xi \right] \end{cases}$$

Pour l'état de base, le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$(14.8.13) \quad \begin{cases} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} U_1^2 + \rho g z = C_1 & \text{pour } z \geq 0 \\ \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} U_2^2 + \rho g z = C_2 & \text{pour } z \leq 0 \end{cases}$$

La condition dynamique correspondante à cet état stipule alors que :

$$(14.8.14) \quad \text{en } z = 0 : P_1 = \rho_1 \left[C_1 - \frac{1}{2} U_1^2 \right] = P_2 = \rho_2 \left[C_2 - \frac{1}{2} U_2^2 \right]$$

En soustrayant cette relation à (14.8.12), on obtient pour le champ de perturbations la condition :

$$(14.8.15) \quad \text{en } z = 0 : \begin{cases} p_1 = \rho_1 \left[C_1(t) - C_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - g\xi \right] \\ = p_2 = \rho_2 \left[C_2(t) - C_2 - \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - g\xi \right] \end{cases}$$

On peut éliminer les fonctions $C_1(t) - C_1$ et $C_2(t) - C_2$ et les incluant dans la définition des potentiels ϕ_1 et ϕ_2 . D'où en définitive :

$$(14.8.16) \quad \rho_1 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + g\xi \right] = \rho_2 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g\xi \right]$$

➤ Synthèse

Le problème à résoudre est donc constitué par les équations (14.8.5) et par les conditions aux limites (14.8.6), (14.8.10) et (14.8.16). Nous regroupons cet ensemble ci-dessous.

$$(14.8.17-a) \quad \begin{cases} \Delta \phi_1 = 0 \\ \Delta \phi_2 = 0 \end{cases}$$

(14.8.17-b)

conditions aux limites à l'   :

$$\begin{cases} \varphi_1 \rightarrow 0 \text{ pour } z \rightarrow \infty \\ \varphi_2 \rightarrow 0 \text{ pour } z \rightarrow -\infty \end{cases}$$

(14.8.17-c)

conditions aux limites en $z = 0$:

$$\begin{cases} \text{- condition cinématique} \\ w_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ w_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \text{- condition dynamique (relation de Bernoulli)} \\ \rho_1 \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + g\xi \right] = \rho_2 \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + g\xi \right] \end{cases}$$

➤ Solutions : ondes propagatives

On cherche les solutions de ce problème sous la forme d'ondes propagatives, donc sous une forme dite **en modes normaux** :

(14.8.18)

$$\begin{cases} F(x, z, t) = z - \xi(x, t) = 0 & \text{- équation de l'interface} \\ \xi(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{\xi} e^{ik(x-ct)} \right\} \\ (\varphi_1, \varphi_2)(x, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)(z) e^{ik(x-ct)} \right\} \end{cases}$$

Dans ces expressions $k = 2\pi/\lambda$ définit le nombre d'onde, $\operatorname{Re}\{.\}$ désigne la partie réelle de la quantité entre parenthèses, et c est homogène à une vitesse. On consid rera que k est **réel et positif**. Nous verrons alors que c peut être complexe, de la forme $c = c_r \pm ic_i$, où la partie réelle c_r définit la **vitesse de phase** de l'onde et où l'éventualité d'une partie imaginaire c_i non-nulle offre la possibilité d'un **comportement instable de l'interface**. En effet, conformément à (14.8.18), dans le cas où $c_i \neq 0$, l'amplitude de la perturbation est proportionnelle à $e^{\pm kc_i t}$ et peut donc augmenter avec le temps. La quantité $k c_i$, homogène à une fréquence, définit le **taux d'amplification** de la perturbation.

En introduisant la forme normale (14.8.18) dans les équations de Laplace (14.8.17-a), on obtient pour les potentiels deux équations du type :

(14.8.19)

$$\hat{\varphi}_i''(z) - k^2 \hat{\varphi}_i(z) = 0, i = 1, 2$$

Ces équations admettent des solutions de la forme $\hat{\varphi}_i = \operatorname{const.} \times e^{\pm kz}$. Tenant compte des conditions en $\pm \infty$, cf. (14.8.17-b), on posera donc :

$$(14.8.20) \quad \begin{cases} \hat{\phi}_1 = Ae^{-kz} \\ \hat{\phi}_2 = Be^{kz} \end{cases}$$

Il nous reste alors trois équations algébriques linéaires correspondant aux conditions cinématiques et dynamiques (14.8.17-c) qui permettent de déterminer $(A, B, \hat{\xi})$. Les conditions cinématiques donnent :

$$(14.8.21) \quad \begin{cases} -Ak = -ikc\hat{\xi} + U_1 ik \hat{\xi} \\ Bk = -ikc\hat{\xi} + U_2 ik \hat{\xi} \end{cases}$$

Soit :

$$(14.8.22) \quad \begin{cases} A = -i(U_1 - c)\hat{\xi} \\ B = i(U_2 - c)\hat{\xi} \end{cases}$$

La condition dynamique (relation de Bernoulli) donne :

$$(14.8.23) \quad \rho_1 [ikA(U_1 - c) + g\hat{\xi}] = \rho_2 [ikB(U_2 - c) + g\hat{\xi}]$$

En remplaçant A et B par leurs expressions (14.8.22), $\hat{\xi}$ disparaît et on obtient alors le polynôme d'ordre 2 en c suivant :

$$(14.8.24) \quad \rho_1 k (U_1 - c)^2 + \rho_2 k (U_2 - c)^2 = g(\rho_2 - \rho_1)$$

On trouve, pour les deux solutions de ce polynôme :

$$(14.8.25) \quad c = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{g}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} - \rho_1 \rho_2 \left(\frac{U_1 - U_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2}$$

La solution cher  e est donc définie par (14.8.18) et (14.8.25). Comme annoncé, conformément à (14.8.25), la célérité de l'onde peut être complexe. C'est le cas lorsque le terme sous la racine carrée est négatif, soit :

$$(14.8.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} k > k_c \\ k_c = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{g}{(U_1 - U_2)^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{écoulement instable}$$

On a dans ce cas $c = c_r \pm ic_i$ avec $c_i > 0$. La solution est alors composée d'une paire d'ondes d'amplitude proportionnelle à $e^{\pm kc_i t}$. L'une est donc exponentiellement croissante avec le temps. On dit dans ce cas que l'écoulement est instable. Dans le cas opposé, si $k < k_c$, l'écoulement est stable.

La solution stable est composée d'une paire d'ondes d'amplitude fixée par les conditions initiales, où c défini par (14.8.25) est un nombre réel.

Nous allons voir maintenant que l'effort consenti pour aboutir à cette solution générale du comportement instationnaire d'une surface de contact entre deux fluides non-miscibles est payant. Cette solution décrit en effet une grande variété de phénomènes observés dans la nature selon la valeur des paramètres ρ_1, ρ_2, U_1, U_2 . Nous allons les décrire tour à tour.

➤ Application : ondes de surface, instabilité de Rayleigh-Taylor et houle

Ce cas correspond à $U_1 = U_2$. Dans ce cas la surface de contact est **irrotationnelle**.

Remarque -

Ce cas sort du cadre strict de ce chapitre consacré à la vorticité, mais puisqu'il est couvert par la théorie ci-dessus et il serait dommage de ne pas le traiter.

Le caractère stable ou instable des perturbations de cette surface de contact irrotationnelle dépend alors de l'étagement vertical des densités ρ_1, ρ_2 . Le nombre d'onde critique k_c défini en (14.8.26), vaut $\pm\infty$ selon le cas.

✓ Si le **fluide lourd est situé au-dessus du fluide léger**, soit si $\rho_1/\rho_2 > 1$, cf. figure 14.14, on parle de **stratification instable**. En effet, pour ce cas, on trouve $k_c = -\infty$. Donc, puisque tout nombre d'onde positif vérifie la condition $k > k_c$, l'écoulement est **inconditionnellement instable**. Cela signifie que toute perturbation quelle que soit sa longueur d'onde croit comme $e^{k c_i t}$ avec un taux d'amplification $k c_i$ valant :

$$(14.8.27) \quad k c_i = \sqrt{g k \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}$$

Nous avons déjà exemplifié brièvement au **chapitre 1** cette situation à propos de la cimentation primaire, cf. figure 1.31 (a) (cas de droite). L'instabilité obtenue porte le nom d'**instabilité de Rayleigh-Taylor**. Le rapport sans dimension $\mathcal{A} = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ est appelé **nombre d'Atwood**.

✓ Dans la situation opposée, c.- -d. quand le fluide lourd est situé au-dessous du fluide léger, soit si $\rho_1/\rho_2 < 1$, alors $k_c = \infty$ de sorte que toutes les perturbations sont stables. On qualifie cette situation de **stratification stable**. La **houle** qui se développe à l'interface entre l'eau et l'air est l'exemple type des perturbations qui peuvent se développer dans une situation de stratification stable. Si l'on néglige dans (14.8.25) la densité de l'air ρ_1 devant la densité de l'eau ρ_2 , en posant $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \rho$, et si l'état de base est au repos, soit si $U_1 = U_2 = 0$, on trouve :

$$(14.8.28) \quad c^2 = \frac{g}{k} = \frac{g\lambda}{2\pi}$$

Cette formule caractérise la vitesse de phase de ces ondes de surface. Pour les grands nombres d'onde k (i.e. les petites longueurs d'onde λ) il convient de compléter cette théorie en ajoutant dans la condition dynamique (14.8.17-c) l'effet de la tension superficielle γ , cf. (1.6.7). On laissera au lecteur le soin de démontrer que l'on obtient alors :

$$(14.8.29) \quad c^2 = \frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}$$

La figure 14.16 ci-dessous montre l'allure de la vitesse de phase c dans un diagramme $\log c - \log \lambda$ où l'on distingue bien le régime des ondes de gravité (grandes longueurs d'onde) de celles correspondant au régime dominé par la tension superficielle (petites longueurs d'onde). Le premier régime correspond à la **houle marine** illustrée plus bas sur la figure 14.16 (a). Le second caractérise les **ondes capillaires**.

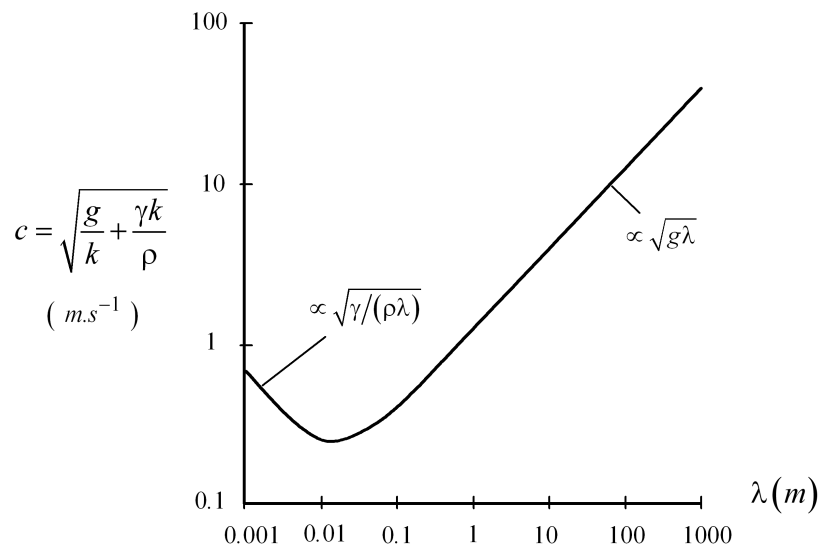


Figure 14.15 - Célérité des ondes de capillarité - gravité sur une interface air/eau en fonction de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. Les valeurs numériques sont $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$, $\gamma = 0,074 \text{ kg.s}^{-2}$, $\rho = 998 \text{ kg.m}^{-3}$

Les ondes capillaires sont les vaguelettes de longueurs d'onde inférieures au centimètre, cf. figure 14.15, que l'on peut voir se développer sur toute interface (surfaces d'eau, gouttes, bulles) perturbée à petite échelle, comme sur l'exemple de la figure 14.16 (b).

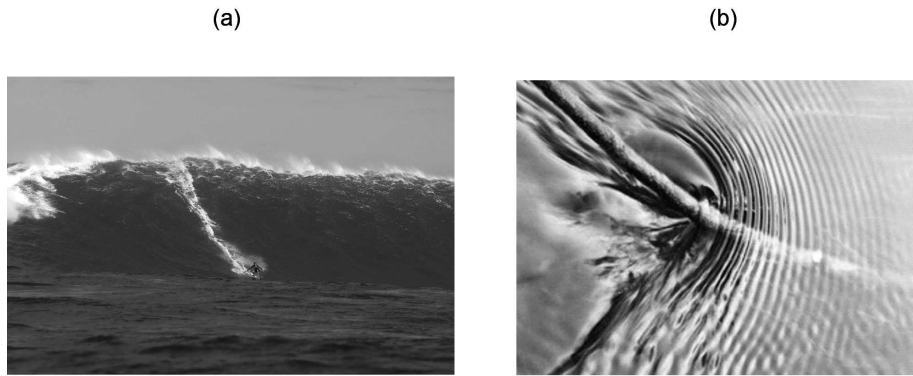


Figure 14.16 - (a) Grande houle en régime de déferlement, (b) ondes capillaires.

Il est alors intéressant de s'interroger à propos de la houle sur la validité de l'hypothèse de petites perturbations (14.8.3) qui est à la base de cette théorie linéaire. Les observations maritimes confirment la validité de cette hypothèse.   titre d'exemple, les grandes houles qui se développent dans les hautes latitudes de l'hémisphère sud, là elles ne rencontrent aucune terre pouvant les arrêter, peuvent atteindre des amplitudes supérieures à la dizaine de mètres. Mais leurs longueurs d'onde dépassent alors la centaine de mètres. Dans ce cas, $h/\lambda \approx 0.1$. L'hypothèse de linéarisation (14.8.3) reste donc admissible.

➤ L'instabilité de Kelvin – Helmholtz : propriétés

Nous revenons ici au propos de ce chapitre : la dynamique de la vorticité. On s'intéresse en effet maintenant au cas où l'écoulement de fluide est homogène, tel que $\rho_1 = \rho_2$, mais comporte une discontinuité de vitesse $U_1 \neq U_2$. La surface de contact représente dans ce cas une **nappe de vorticité isolée**. Conformément à (14.8.26), $k_c = 0$. Cet écoulement est donc instable pour tout nombre d'onde $k > 0$. D'après (14.8.25), on obtient pour la célérité des ondes :

$$(14.8.30) \quad c = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \pm \frac{i}{2}(U_1 - U_2),$$

L'amplitude des ondes croît alors avec un taux d'amplification valant :

$$(14.8.31) \quad k c_i = \frac{1}{2}(U_1 - U_2)k$$

Conformément à ce résultat, les ondes sont d'autant plus amplifiées que leur nombre d'onde k est grand, donc que leur longueur d'onde est courte. Par ailleurs, conformément à (14.8.30), dans un repère en translation de vitesse $U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$ égale à la vitesse moyenne des deux écoulements, l'onde est amplifiée in situ, comme représenté sur la figure 14.17 ci-dessous.

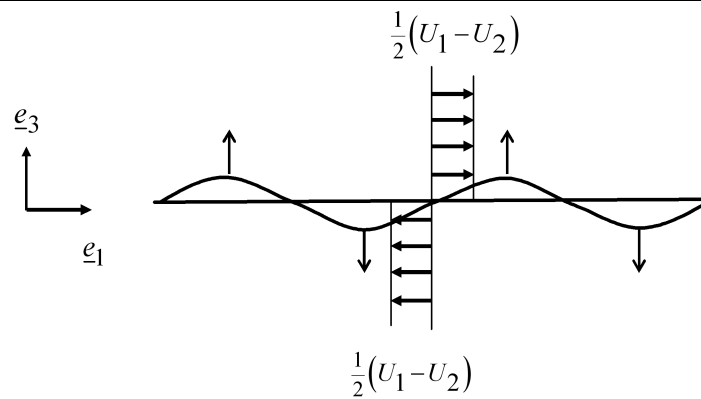


Figure 14.17 - Onde d'instabilité de Kelvin – Helmholtz.

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz dont nous venons de décrire ici les fondements théoriques va être analys e de nouveau ci-dessous au moyen de raisonnements heuristiques qui vont permettre de mieux éclairer les aspects physiques de ce phénomène.

14.9 L'instabilité de Kelvin-Helmholtz : phénoménologie et interprétation

Dans ce paragraphe, nous allons nous concentrer sur les aspects phénoménologiques du comportement de la surface de contact entre deux écoulements parallèles d'un fluide parfait incompressible homogène non pesant, de vitesses U_1 et U_2 différentes. La surface de contact entre ces deux écoulements constitue une **surface de vorticité isolée**.

La théorie de ce problème est détaillée dans l'approfondissement ci-dessus où elle est traitée sous une forme générale qui prend en compte la possibilité d'un couplage avec des effets de masse volumique. Si on se limite alors au cas d'une interface entre deux écoulements de fluide parfait incompressible de même masse volumique, la théorie montre que l'interface, qui devient une surface singulière rotationnelle entre deux écoulements irrotationnels, est instable au sens où toute perturbation initiale de cette interface est amplifiée. Nous allons expliquer ici pourquoi au moyen d'arguments physiques, sans faire appel aux équations. Cela va nous permettre de « mettre en œuvre » de nouveau les diverses notions apprises dans ce chapitre.

La situation qui nous intéresse est présentée sur la dernière figure de l'approfondissement ci-dessus. Il s'agit de la figure **14.17** où l'on se place dans un repère mobile en translation de vitesse égale à la vitesse moyenne des deux écoulements :

$$(14.9.1) \quad U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$$

Remarque -

On pourra se reporter à la figure 14.14 de l'approfondissement pour la définition de la configuration dans le repère fixe.

Comme schématisé sur la figure 14.17, la théorie et l'observation montrent que la perturbation sinusoïdale de l'interface est amplifiée au cours du temps. Un tel phénomène caractérise un comportement **instable** de l'écoulement.

➤ **L'instabilité de Kelvin – Helmholtz : interprétation**

Pour interpréter ce comportement instable d'une nappe de vorticité, on peut raisonner soit à partir de la vorticité, soit à partir de la pression. Nous allons commencer par le premier raisonnement.

✓ **Interprétation « par la vorticité »**

Conformément à ce que nous avons vu, la nappe de vorticité isolée étudiée ici est caractérisée par une densité surfacique de vorticité fixée par le saut de vitesse à travers la nappe, cf. (14.7.14) :

$$(14.9.2) \quad \underline{\gamma}(\underline{x}) = \underline{n} \wedge \llbracket \underline{u} \rrbracket = \underline{e}_3 \wedge [U_1 \underline{e}_1 - U_2 \underline{e}_1] = (U_1 - U_2) \underline{e}_2.$$

Remarque -

Si l'on calcule cette quantité dans le repère relatif de la figure 14.17, on vérifie bien que $\underline{\gamma}(\underline{x}) = \underline{n} \wedge \llbracket \underline{u} \rrbracket = \underline{e}_3 \wedge [\frac{1}{2}(U_1 - U_2) \underline{e}_1 - [-\frac{1}{2}(U_1 - U_2) \underline{e}_1]] = (U_1 - U_2) \underline{e}_2$.

On raisonne alors en s'appuyant sur le schéma explicatif de la figure 14.18 ci-dessous.

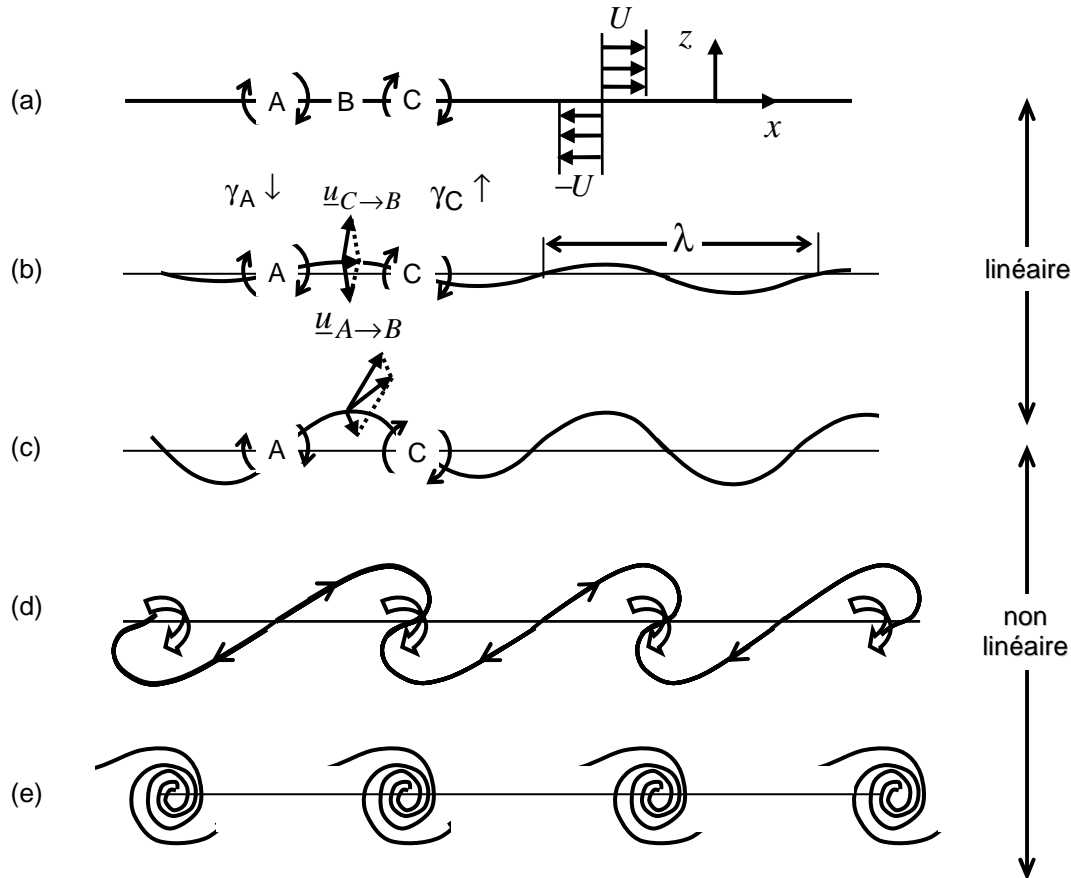


Figure 14.18 - Evolution linéaire et non linéaire d'une nappe de vorticité perturbée.

Initialement, cf. figure **14.18 (a)**, la nappe est rectiligne car en tout point \underline{x} de cette nappe le champ de vitesse induit en ce point par le reste de la nappe est de somme nulle. En effet, la contribution de la demi-nappe gauche compense exactement celle de la demi-nappe droite puisque le produit vectoriel $(\underline{x} - \underline{x}') \wedge \underline{\gamma}(\underline{x}')$ intervenant dans l'expression **(14.7.10)** de la loi de Biot-Savart change de signe pour ses deux contributions.

On superpose alors sur cette nappe une perturbation de longueur d'onde λ et on considère trois points de la nappe, A, B et C, de même densité surfacique de vorticité initiale $\gamma_A = \gamma_B = \gamma_C$. On note $\underline{u}_{A \rightarrow B}$ et $\underline{u}_{C \rightarrow B}$ les vitesses induites en B respectivement par le point A et par le point C symétrique de A par rapport à B. Comme schématisé sur la figure **14.18 (b)**, pour une perturbation d'amplitude non nulle la combinaison des deux vitesses $\underline{u}_{A \rightarrow B}$ et $\underline{u}_{C \rightarrow B}$ tend à convecter la vorticité de B vers C. Cela concentre la vorticité de la nappe dans la région du point C au détriment de la région du point A, de sorte que γ_C augmente et γ_A diminue. Comme montré sur la figure **14.18 (c)**, cela implique alors que $\underline{u}_{C \rightarrow B}$ augmente en même temps que $\underline{u}_{A \rightarrow B}$ diminue. Ce processus d'induction mutuelle ne peut que s'amplifier : la perturbation s'intensifie.

Les figures **14.18 (d)** et **14.18 (e)** décrivent alors le régime **non-linéaire** de l'évolution de la nappe. Ce régime correspond à la situation où l'hypothèse de petites perturbation (qui est l'hypothèse de base de la théorie linéaire présentée dans l'approfondissement précédent, cf. **(14.8.3)**) ne tient plus car l'amplitude du déplacement vertical de la nappe n'est plus négligeable devant sa longueur d'onde, et parce que corrélativement, les variations de la densité de vorticité γ le long de la nappe déformée ne sont plus négligeables devant le saut de vitesse $2U$ du champ de base. Comme schématisé sur la figure **14.18 (e)**, le processus périodique de concentration-déplétion de la vorticité aboutit à une rupture de la nappe et à la formation d'une allée de tourbillons discrets.

✓ Interprétation « par la pression »

L'interprétation en termes de pression repose sur le théorème de la pression présenté au **chapitre 11**. Comme nous l'avons fait alors pour expliquer le phénomène de la portance, cf. figure **11.9**, on part des deux conditions de pression en $z = \pm\infty$. Elles correspondent à celles de deux écoulements uniformes non perturbés. Si l'on considère pour simplifier le cas où les écoulements sont non-pesants, ces deux pressions sont identiques. Pour un fluide parfait l'interface perturbée sinusoïdale correspond à une ligne de courant. Considérons alors le point B de la figure **14.18** dans le régime linéaire. Partant de $z = -\infty$, en progressant vers la région du point B située sous l'interface, on s'éloigne du centre de courbure locale et la pression est supérieure à $p(z = -\infty)$. Si l'on part maintenant de $z = \infty$, en approchant le point B par le haut, on se rapproche d'un centre de courbure et la pression diminue. Donc $p_B(z^+) < p_B(z^-)$. Ainsi, la pression sous le point B est supérieure à la pression au-dessus et cela tend à pousser les « particules de fluide » composant l'interface plus haut. La situation est donc instable au sens où la déformation de l'interface ne peut que s'amplifier avec le temps au fur et à mesure que sa courbure augmente. Le même raisonnement mené dans une région « en creux » de l'interface aboutit à la même conclusion : le creux tend à s'accentuer.

➤ L'appariement tourbillonnaire

L'écoulement correspondant à l'allée de tourbillons obtenue à l'issue du régime non-linéaire décrite sur la figure **14.18 (e)** est-il stable ? La réponse est négative. En effet, toute perturbation de cet état va de nouveau être amplifiée par le même mécanisme que celui que nous venons de décrire. Pour montrer cela, conformément à la première ligne de la figure **14.19** ci-dessous, on modélise maintenant l'écoulement par une allée périodique infinie de

tourbillons ponctuels de circulation Γ et de longueur d'onde λ . Le champ de vorticité de cet écoulement de fluide parfait vaut donc, cf. (14.7.8) :

$$(14.9.3) \quad \underline{\omega}(\underline{x}) = \underline{e}_2 \Gamma \delta(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\lambda)$$

où δ désigne une distribution de Dirac. Comme schématisé sur cette figure, on suppose que cette allée de tourbillons ponctuels est de nouveau perturbée de manière sinusoïdale avec une longueur d'onde λ . Pour chaque tourbillon, on analyse alors de nouveau les vitesses induites par ses deux voisins les plus proches. Ces vitesses sont schématisées pour les deux premiers tourbillons sur la seconde ligne de la figure 14.19. On trouve de nouveau que le désalignement des tourbillons tend à les rapprocher deux à deux, ce qui aboutit à former une nouvelle allée périodique composée de paires de tourbillons de longueur d'onde 2λ . Cet écoulement est encore instable. Cette instabilité est qualifiée de **sous-harmonique** car elle transforme un écoulement caractérisé par une longueur d'onde λ en un nouvel écoulement de longueur d'onde double.

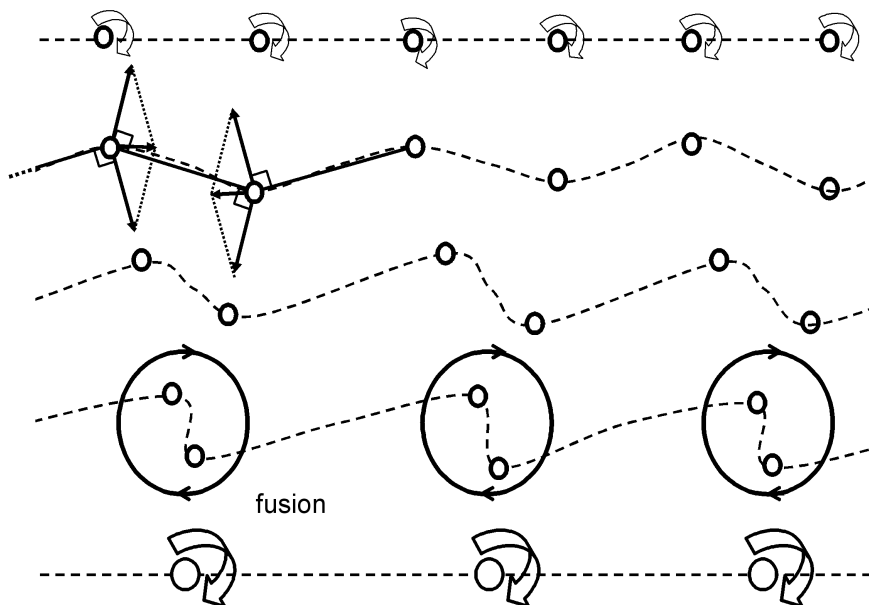


Figure 14.19 - Instabilité sous-harmonique et appariement tourbillonnaire.

Comme suggéré en bas de la figure 14.19, la formation de paires de tourbillons se termine alors par le mélange, ou fusion, des deux tourbillons en un seul. Comme expliqué plus bas, c'est la viscosité qui produit in fine ce mélange sur le long terme. L'ensemble des deux mécanismes, à.- .-d. la formation de paires et leur fusion, est appelé **appariement tourbillonnaire** (*vortex merging*, en anglais). L'instabilité sous-harmonique va alors de

nouveau affecter la nouvelle allée, les tourbillons issus du premier appariement s'appariant de nouveau entre eux pour aboutir à un écoulement périodique de longueur d'onde 4λ , etc.

➤ Confrontation aux expériences

On montre sur la figure **14.20** ci-dessous deux types de résultats qui confirment nos analyses.

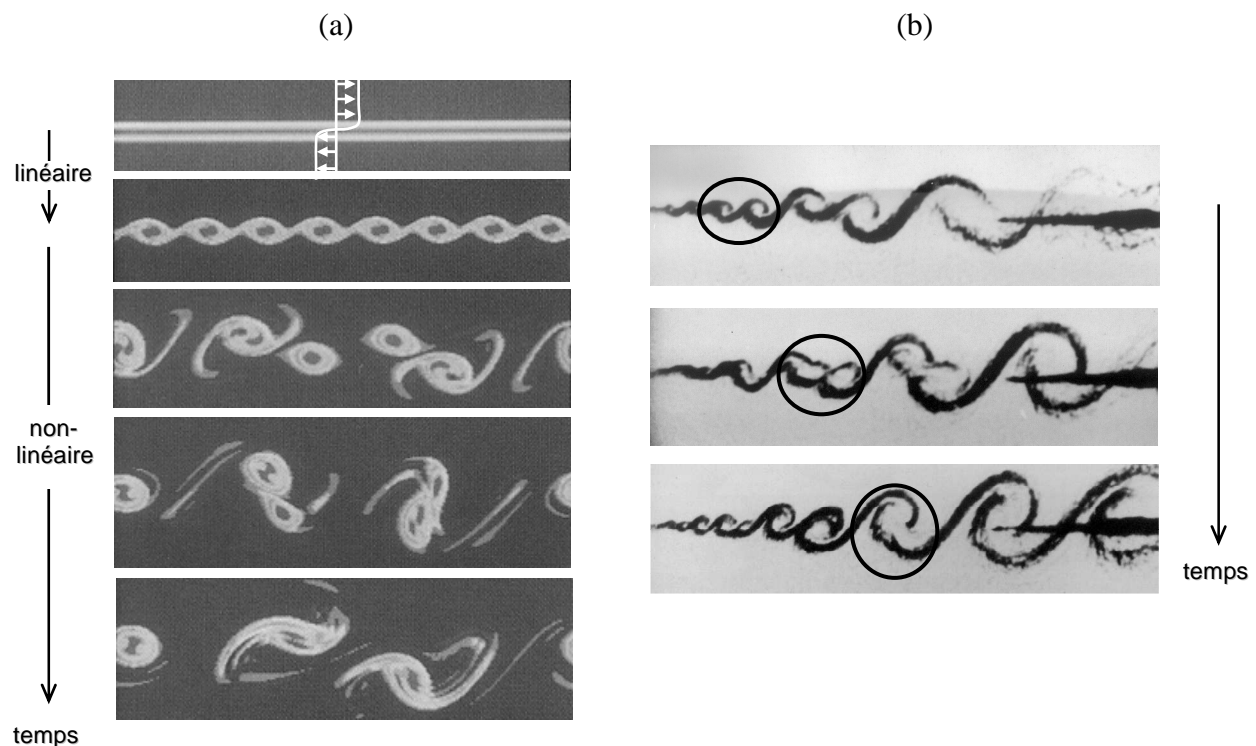


Figure 14.20 - Instabilité Kelvin-Helmholtz : (a) développement temporel d'une couche de mélange de fluide incompressible homogène par simulation des équations de Navier-Stokes (champ de vorticité ; source : P. Comte, 1989, Ph.D. Thesis, National Polytechnic Institute, Grenoble), (b) visualisation ombroscopique du développement spatial d'une couche de mélange entre un écoulement d'hydrogène à 10m.s^{-1} et un écoulement d'hélium-argon à 3.5m.s^{-1} (source : Van Dyke, 1982 ; on identifie sur la droite de ces clichés la présence d'une sonde).

Le premier résultat, celui de la figure **14.20(a)**, n'est pas une expérience proprement dite, mais une simulation numérique, à savoir celle d'une couche de mélange bidimensionnelle dans un fluide incompressible homogène. La quantité visualisée est la vorticité. Comme illustré sur la figure du haut, on considère cette couche de mélange dans un repère où l'interface est initialement stationnaire, produite par deux écoulements parallèles de vitesses $\pm U$. Cela correspond à la figure **14.17** de l'approfondissement ci-dessus. Dans cette simulation, on fait l'hypothèse que l'écoulement est périodique dans la direction horizontale.

Cela signifie que le champ sur la frontière de droite du domaine de calcul est identique à celui sur la frontière de gauche. La résolution des équations de Navier-Stokes dans ce cadre d'hypothèses permet de caractériser l'évolution temporelle de cet écoulement. La première image en haut de la figure 14.20 (a) montre que le champ de vitesses n'est pas discontinu et que la nappe de vorticité possède une certaine épaisseur. En effet, cette simulation numérique tient compte de la viscosité qui engendre une diffusion moléculaire de la vorticité. La séquence temporelle présentée montre tout d'abord l'issue de la phase linéaire et du début de la phase non-linéaire de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, à savoir une allée de tourbillons périodiques. Puis ces tourbillons s'apparient et fusionnent conformément au schéma de la figure 14.19. La figure 14.20 (b) montre quant à elle le développement spatial de ce mécanisme tel qu'on l'obtient dans une expérience. Il s'agit ici du mélange entre deux gaz d'indices différents, l'Hélium et l'Hydrogène, visualisé au moyen de la technique de l'ombroscopie.

Remarque -

Ces images ombroscopiques sont obtenues après une traversée de l'écoulement par une lumière blanche dans la direction perpendiculaire à l'écoulement et parallèlement à la surface de la nappe de vorticité. Les gradients d'indice consécutifs au mélange entre les deux fluides sont ainsi visualisés.

Comme identifié au moyen de cercles noirs sur ces trois photos successives, les tourbillons adjacents issus de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz s'apparient quand ils progressent vers l'aval. L'épaisseur de la zone de mélange augmente alors vers l'aval comme la taille des tourbillons.

14.10 Le rôle de la viscosité

A ce stade, il convient de s'interroger sur le rôle de la viscosité. Comme illustré ci-dessus sur la figure 14.20 (a) (figure du haut), la prise en compte de la viscosité dans une nappe de vorticité isolée se ramène à une ** limination du caractère discontinu de la nappe**. Cela revient à l'épaissir. On substitue alors une description continue à la représentation discontinue de type fluide parfait qui s'appuie sur la théorie des distributions à l'échelle du continuum. Mais les mécanismes de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz et de l'instabilité sous-harmonique décrits ci-dessus sont **de nature non-visqueuse** (ils relèvent du modèle de fluide parfait) : ils restent donc pleinement actifs. Une bonne façon de voir les choses revient alors à appliquer les mêmes raisonnements que ceux menés sur la figure 14.18 sur une « nappe plus épaisse ». Ce que cela change, c'est que l'instabilité de Kelvin - Helmholtz ne va pas pouvoir se développer sur les longueurs d'onde inférieures à l'épaisseur visqueuse de la nappe car elles

sont alors amorties par le frottement visqueux. Si on note δ l'échelle de l'épaisseur visqueuse de la nappe, alors la viscosité ne fait qu'introduire une longueur d'onde, dite de **coupure visqueuse**, qui est δ . Cette échelle de coupure est telle que toute perturbation de longueur $\lambda < \delta$ redevient stable.

Enfin, la viscosité intervient aussi dans la phase de **fusion** des tourbillons qui complète le mécanisme d'**appariement tourbillonnaire** comme schématisé sur la figure 14.19 et illustré par les exemples de la figure 14.20. En fait, c'est elle qui est responsable du mélange final de la vorticité des deux tourbillons qui forment une paire lors de chaque étape du scénario de l'instabilité sous-harmonique. La figure 14.21 ci-dessous scrute cela de manière plus précise.

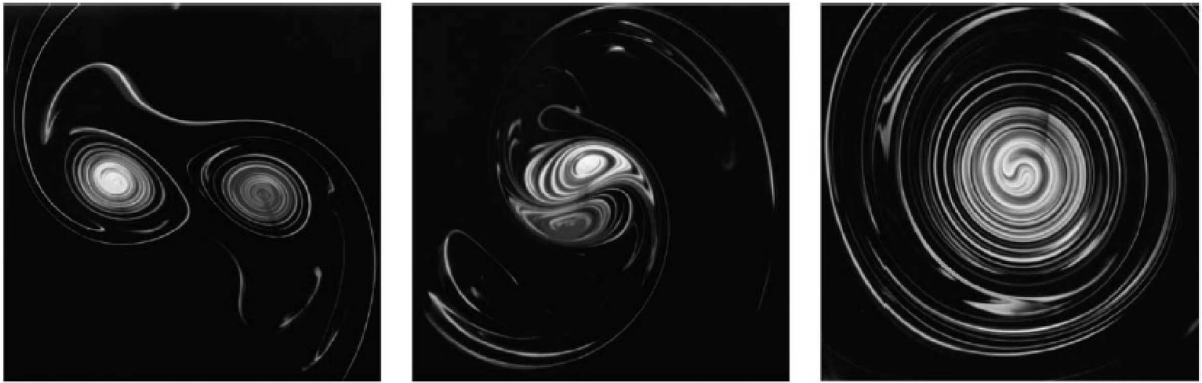


Figure 14.22 - Plans de coupe de deux tourbillons de mêmes circulations visualisés par colorant dans une cuve hydrodynamique en fonction du temps (le temps évolue de la gauche vers la droite ; Source : Meunier, Le Dizes and Leweke, Physics of vortex merging, C. R. Physique 6, pp. 487-499, 2005).

➤ Le terme visqueux de l'équation d'Helmholtz

On peut compléter maintenant l'interprétation de l'équation de bilan de la vorticité (14.3.7) en considérant l'**effet de la viscosité**. Pour simplifier cette analyse on se limitera ici au cas d'un **fluide incompressible homogène de coefficient de viscosité constant**.

L'effet de la viscosité est traduit par le dernier terme $\underline{rot} \left[\left(\underline{div} \underline{\tau} \right) / \rho \right]$ de l'équation (14.3.7).

Pour un **fluide newtonien**, ce terme prend la forme suivante :

$$(14.10.1) \quad \underline{rot} \left(\frac{1}{\rho} \underline{div} \underline{\tau} \right) = \underline{rot} \left[\frac{1}{\rho} \underline{grad} (\lambda \underline{div} \underline{u}) + \frac{1}{\rho} \underline{div} (2\eta \underline{d}) \right]$$

Pour un fluide **incompressible** de coefficient de viscosité constant, cela donne :

$$(14.10.2) \quad \underline{\text{rot}} \left(\frac{1}{\rho} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\tau}} \right) = 2\nu \underline{\text{rot}} \left(\underline{\text{div}} \underline{\underline{d}} \right)$$

Compte tenu de la relation tensorielle :

$$(14.10.3) \quad 2 \underline{\text{div}} \underline{\underline{d}} = \Delta \underline{u} + \underline{\text{grad}} (\underline{\text{div}} \underline{u}),$$

d     vue au **chapitre 7**, cf. (7.3.7), pour $\underline{\text{div}} \underline{u} = 0$ on obtient :

$$(14.10.4) \quad \underline{\text{rot}} \left(\frac{1}{\rho} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\tau}} \right) = \nu \underline{\text{rot}} \Delta \underline{u}.$$

On utilise alors de nouveau l'identité vectorielle (cf. annexe **A2.4**) :

$$(14.10.5) \quad \underline{\text{rot}} (\underline{\text{rot}} \underline{u}) = \underline{\text{grad}} (\underline{\text{div}} \underline{u}) - \Delta \underline{u}$$

Soit, si $\underline{\text{div}} \underline{u} = 0$:

$$(14.10.6) \quad \underline{\text{rot}} \Delta \underline{u} = -\underline{\text{rot}} [\underline{\text{rot}} (\underline{\text{rot}} \underline{u})]$$

En faisant de nouveau appel à (14.10.5), on peut écrire :

$$(14.10.7) \quad \underline{\text{rot}} \Delta \underline{u} = \Delta (\underline{\text{rot}} \underline{u}) - \underline{\text{grad}} \left[\underbrace{\underline{\text{div}} (\underline{\text{rot}} \underline{u})}_{=0} \right]$$

Donc, en d         :

$$(14.10.8) \quad \underline{\text{rot}} \left(\frac{1}{\rho} \underline{\text{div}} \underline{\tau} \right) = \nu \Delta \underline{\omega}$$

Ainsi, comme annoncé dans la dernière remarque du paragraphe (14.3), dans un écoulement de fluide incompressible homogène rotationnel l'effet de la viscosité sur la vorticité se réduit à un terme classique de diffusion de type laplacien.

➤ **L'équation d'Helmholtz pour un écoulement de fluide newtonien incompressible homogène avec force de volume dérivant d'un potentiel**

Pour un écoulement de fluide newtonien incompressible homogène de coefficient de viscosité constant où les forces de volume dérivent d'un potentiel, en posant $\underline{\text{div}} \underline{u} = \underline{\text{grad}} \rho = \underline{\text{rot}} \underline{f} = 0$ dans l'équation d'Helmholtz générale (14.3.7), compte tenu de (14.10.6), on obtient l'équation :

$$(14.10.9) \quad \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underbrace{\nabla \underline{\omega} \cdot \underline{u}}_{\text{advection}} = \underbrace{\underline{d} \cdot \underline{\omega}}_{\substack{\text{distorsion :} \\ \text{contraction-étirement,} \\ \text{gauchissement}}} + \underbrace{\nu \Delta \underline{\omega}}_{\substack{\text{diffusion} \\ \text{visqueuse}}}$$

Remarque -

Conformément aux remarque du paragraphe 3, cf. (14.3.8), nous avons remplacé ici dans l'équation d'Helmholtz (14.3.7) le terme $\nabla \underline{u} \cdot \underline{\omega}$ par $\underline{d} \cdot \underline{\omega}$

La forme de cette équation permet d'énoncer le résultat suivant :

La viscosité, qui à travers le terme $\nu \Delta \underline{\omega}$ diffuse $\underline{\omega}$ dans l'espace, tend ainsi à contrer tout effet de concentration locale de la vorticité qui peut résulter de son étirement.

Remarque -

Nous ne limitons pas cet énoncé à un écoulement de nature particulière car le mécanisme qu'il décrit est en fait tout à fait général.

En particulier, dans un écoulement de fluide réel, aussi petite que soit la viscosité, elle lisse (et donc élimine) toutes distributions singulières obtenues dans le cadre du modèle de fluide parfait. Ainsi, en présence de viscosité, le tourbillon filament et la nappe de vorticité isolée perdent obligatoirement leur caractère discontinu. Mais, comme souligné au début du paragraphe, cela n'élimine pas les mécanismes de distorsion (contraction-étirement, gauchissement), ni le caractère instable de ces écoulements, car ce sont des mécanismes de nature non-visqueuse.

14.11 Résumé des formules essentielles

➤ Lois d'Helmholtz

- ✓ La circulation Γ d'un tube de vorticité est une constante indépendante de la section du tube considérée.
- ✓ Une ligne de vorticité ne peut être qu'infinie, où fermée sur elle-même, ou encore en contact avec les frontières du domaine fluide.

➤ Equation de la vorticité ( quation d'Helmholtz)

- ✓ Forme générale, cf. (14.3.7)

$$(14.11.1) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \omega \cdot \underline{u} = \nabla \underline{u} \cdot \omega - \omega \operatorname{div} \underline{u} + \operatorname{rot} \underline{f} + \frac{1}{\rho^2} \operatorname{grad} \rho \wedge \operatorname{grad} p + \operatorname{rot} \left[\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\tau} \right]$$

On peut remplacer dans cette équation $\nabla \underline{u} \cdot \omega$ par $\underline{d} \cdot \omega$, cf. (14.3.8).

- ✓ écoulement de fluide newtonien incompressible homogène de coefficient de viscosité constant où les forces de volume dérivent d'un potentiel, cf. (14.10.9)

$$(14.11.2) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \omega \cdot \underline{u} = \nabla \underline{u} \cdot \omega + \nu \Delta \omega$$

Comme rappelé ci-dessus, on peut remplacer dans cette équation $\nabla \underline{u} \cdot \omega$ par $\underline{d} \cdot \omega$.

➤ Vitesse induite par un champ de vorticité (loi de Biot-Savart)

- ✓ Vitesse induite par un champ de vorticité dans un écoulement de fluide incompressible, cf. (14.6.18)

$$(14.11.3) \quad \underline{u}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \wedge \omega(\underline{x}') d\Omega$$

- ✓ Loi de Biot-Savart pour un tourbillon filament, cf. (14.7.3)

$$(14.11.4) \quad \underline{u}(\underline{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{(\underline{x} - \underline{x}') \wedge d\underline{M}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3}$$

✓ Loi de Biot-Savart pour une nappe de vorticité , cf. (14.7.10)

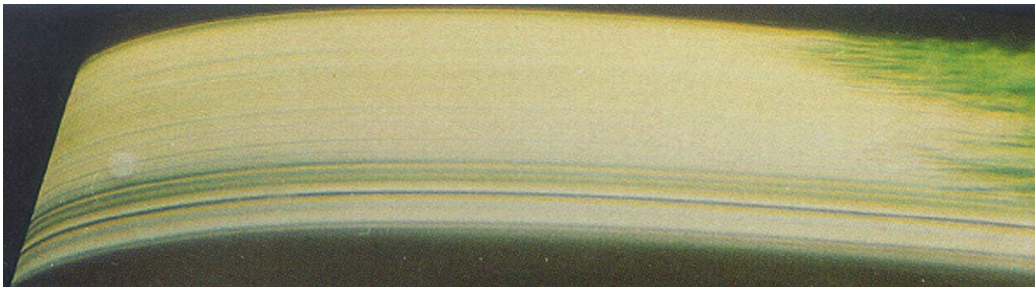
$$(14.11.5) \quad \underline{u}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \wedge \underline{\gamma}(\underline{x}') dS$$

✓ Saut de vitesse tangentielle au travers d'une nappe de vorticité , cf. (14.7.14)

$$(14.11.6) \quad \underline{\gamma} = \underline{n} \wedge [\underline{u}]$$

Chapitre 15

La couche limite



Chapitre 15. La couche limite	543
15.1 La couche limite dynamique : introduction	543
15.2 La couche limite sur une plaque plane sans incidence	547
Hypothèses	548
Equations	548
Région extérieure : l'approximation du fluide parfait	548
La région intérieure : l'approximation de la couche limite	551
Continuité	553
Quantité de mouvement	553
Conditions aux limites : adhérence	556
Conditions aux limites : règle de raccord	556
Les équations de Prandtl	558
Synthèse	560
Effet de la courbure	561
15.3 Le cas d'une plaque plane dans un écoulement sans gradient de pression : la solution autosemblable de Blasius	561
15.4 L'effet d'un gradient de pression	567
Introduction	567
Les effets d'un gradient de pression sur une couche limite : aspects qualitatifs	568
Le décollement	570
Le coefficient de frottement et le coefficient de traînée d'une couche limite	570
Approfondissement * - La solution autosemblable de Falkner-Skan	572
15.5 Les échelles caractéristiques de la couche limite	575
Exemples	575
L'épaisseur physique d'une couche limite	576
Épaisseur de déplacement	577
Approfondissement * - L'épaisseur de quantité de mouvement et le facteur de forme	580
15.6 Sur l'importance du concept de couche limite	582
15.7 Résumé des formules essentielles	584

Annexe

A15.1 Le frottement pariétal	A15-1
Coefficient de frottement pariétal	A15-1
Coefficient de traînée	A15-2

Chapitre 15. La couche limite

La notion de couche limite a été introduite brièvement dans le **chapitre 8** où nous l'avons couplée à l'approximation du fluide parfait, cf. tableau **8.2**. Nous allons établir dans ce chapitre les équations générales de ce couplage.

15.1 La couche limite dynamique : introduction

La figure **15.1** ci-dessous présente un écoulement développant une couche limite sur un objet bidimensionnel (cette figure reprend la figure **8.3 (c)** du **chapitre 8**). La couche limite correspond à la région grisée où le frottement visqueux influence l'écoulement en propageant la condition d'adhérence du fluide qui s'applique sur la surface de l'objet. Cela sous-entend qu'au-delà de cette région, il existe une seconde région qui n'est plus influencée par la viscosité. Cette région « extérieure à la couche limite » peut donc être décrite par l'approximation du fluide parfait.

Remarque -

Comme vu au **chapitre 13**, si l'écoulement à l'extérieur de la couche limite est un écoulement irrotationnel de fluide parfait barotrope et de forces de volume conservatives (par exemple si les conditions amont sont celles d'un écoulement uniforme incompressible homogène), alors il peut être décrit par le modèle des écoulements potentiels.

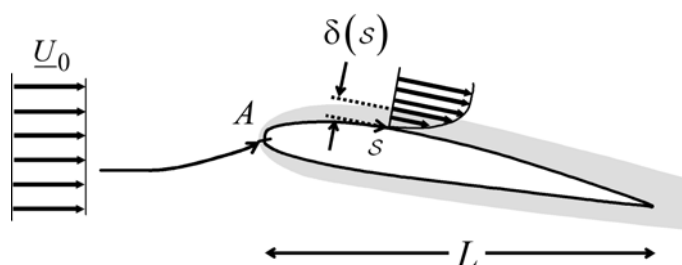


Figure 15.1 - Echelle caractéristique δ de la couche limite sur un objet bidimensionnel (s désigne l'abscisse curviligne le long de la paroi de l'objet ayant pour origine le point d'arrêt A de l'écoulement).

➤ Un principe de séparation d'échelles

La notion de couche limite repose donc sur la possibilité de partager l'écoulement en deux régions distinctes, régions que l'on peut décrire respectivement au moyen de **deux approximations différentes des équations de Navier-Stokes**, celle du **fluide parfait** et celle de la **couche limite**. L'objectif de ce chapitre est de préciser la nature de la seconde approximation ainsi que la façon dont ces deux approximations se raccordent.

Comme schématisé par la série de trois schémas de la figure **8.3** du **chapitre 8**, l'expérience montre que cette partition est d'autant mieux justifiée que le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement est grand. Conformément à la figure **15.1** ce principe nous amène à distinguer deux échelles de longueur : l'échelle L qui caractérise la taille de l'objet et une échelle que nous notons $\delta(s)$ et qui caractérise l'épaisseur locale de la région dominée par la viscosité. C'est la **couche limite**. Comme le suggère la figure **15.1**, l'expérience montre que cette seconde échelle n'est pas une quantité constante : elle dépend de la distance de développement de la couche limite par rapport à son origine. Physiquement, cette origine correspond au point d'arrêt (noté A sur la figure **15.1**) situé sur le bord d'attaque de la paroi et de part et d'autre duquel l'écoulement se sépare pour contourner l'obstacle.

On considère alors une **épaisseur caractéristique moyenne**, que l'on note δ , obtenue en moyennant $\delta(s)$ sur la portion de la surface de l'objet où se développe la couche limite.

Comme rappelé ci-dessus cette épaisseur caractéristique dépend du nombre de Reynolds $Re = U_0 L / \nu$. On posera ainsi :

$$(15.1.1) \quad \boxed{\frac{\delta}{L} = \frac{\delta}{L}(Re)}$$

L'expérience montre alors que :

$$(15.1.2) \quad \frac{\delta}{L}(Re \gg 1) \ll 1$$

Il est possible de préciser d'ores et déjà la dépendance du rapport d'échelles δ/L vis-à-vis du nombre de Reynolds en révisant l'**analyse d'ordres de grandeur** des différents termes des équations du mouvement que nous avons effectuée au **chapitre 8** sur un problème analogue à celui de la figure **15.1** (le « problème guide » de la figure **8.1**). L'utilisation d'une seule

échelle de longueur, la taille L de l'objet, ne permet pas de tenir compte de la présence d'une couche limite. Pour cela, nous devons traduire l'existence d'une région d'épaisseur caractéristique δ autour de l'objet où le terme de frottement $\text{div } \underline{\underline{\tau}}$ de l'équation de la dynamique (4.6.21) devient du même ordre de grandeur que le terme d'inertie $\rho \nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$.

On peut alors raisonner comme suit :

✓ Dans la région de la couche limite, le terme d'inertie $\rho \nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$ jauge la variation de la quantité de mouvement du fluide au cours de son advection à partir du bord d'attaque de l'objet où la condition d'adhérence commence à s'appliquer. En conséquence, pour évaluer l'ordre de grandeur de ce mécanisme nous choisirons de nouveau comme échelle de longueur la distance L parcourue par le fluide au-dessus de l'objet. Quant à l'échelle de vitesse, nous ne disposons toujours que de U_0 car la vitesse sur la paroi est nulle et n'est donc d'aucune utilité. On écrira donc :

$$(15.1.3) \quad \|\rho \nabla \underline{u} \cdot \underline{u}\| \sim \rho U_0^2 / L$$

✓ Le terme visqueux $\text{div } \underline{\underline{\tau}}$ qui est responsable du développement de la couche limite doit dépendre non seulement de l'échelle globale L mais aussi de l'épaisseur locale $\delta(s)$. Pour évaluer l'ordre de grandeur de ce terme, plaçons-nous dans le cas d'un écoulement de fluide newtonien incompressible de viscosité constante. L'expression du terme de frottement du cisaillement dans la loi dynamique du fluide incompressible newtonien, cf. (8.3.15), est :

$$(15.1.4) \quad \text{div } \underline{\underline{\tau}} = \eta \Delta \underline{u} = \eta \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\sim U_0 / L^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\sim U_0 / \delta^2} \right)$$

où l'on a indiqué les ordres de grandeur de chacun des deux termes mis en jeux.

✓ Si l'on se place dans le **cas où la couche limite est de faible épaisseur devant la longueur de l'objet**, soit $\delta/L \ll 1$, c'est l'influence de la plus petite échelle, l'épaisseur δ , qui domine. Donc :

$$(15.1.5) \quad \|\text{div } \underline{\underline{\tau}}\| \sim \eta U_0 / \delta^2$$

L'équilibre qui prévaut dans la région de la couche limite entre le terme d'inertie et le terme de frottement impliquent donc que :

$$(15.1.6) \quad \rho U_0^2 / L \sim \eta U_0 / \delta^2$$

Soit :

$$(15.1.7) \quad \boxed{\frac{\delta}{L} \sim \left(\frac{\nu}{U_0 L} \right)^{1/2} = \text{Re}^{-1/2}}$$

Le rapport d'échelles δ/L est donc bien une fonction décroissante du nombre de Reynolds : il décroît comme l'inverse de la racine carrée de ce nombre sans dimension. Dans ce qui suit, nous allons établir de nouveau cette relation au moyen d'une approche plus rigoureuse.

➤ Autres couches limites

Notons pour terminer cette introduction que dans le titre de ce chapitre nous avons rajouté le qualificatif « dynamique » à la notion de couche limite. La notion de couche limite est en effet très générale. Elle peut s'appliquer à tout problème physique dans lequel les différents mécanismes qui fixent l'évolution d'une variable s'effectuent sur des échelles caractéristiques très différentes. Dans le cas ci-dessus, ce sont les mécanismes de la convection et de la diffusion visqueuse que l'on distingue par deux échelles dont le rapport tend vers zéro dans la limite des très grands nombres de Reynolds.

Remarque -

A titre d'exemple, en mécanique des fluides on identifie aussi la notion de **couche limite thermique** : une couche limite thermique résulte de la propagation d'une condition aux limites thermique par le terme de diffusion de la chaleur dans l'équation de la température quand l'échelle de longueur caractéristique de cette diffusion est très petite devant l'échelle caractéristique de la convection du fluide, c'est à dire quand le nombre de Péclet, cf. (8.2.20), est très grand.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons au cas de la couche limite dynamique que nous appellerons donc couche limite « tout court ».

15.2 La couche limite sur une plaque plane sans incidence

Comme représenté sur la figure 15.2 ci-dessous, nous allons nous concentrer sur le cas d'une couche limite qui se développe sur une plaque plane d'épaisseur nulle dans un écoulement parallèle caractérisé par des conditions amont uniformes. Dans le cas de la figure 15.2 (a), le fluide s'étend jusqu'à l'infini et l'écoulement extérieur à la couche limite est partout uniforme. Dans le cas des figures 15.2 (b) et (c), il est canalisé par une veine convergente ou divergente qui engendrent une accélération ou une décélération. **La vitesse de l'écoulement au niveau de la frontière de la couche limite est notée \underline{u}_e** où l'indice « e » fait référence au mot anglais *edge* pour frontière. Cette vitesse est définie de manière plus précise ci-dessous.

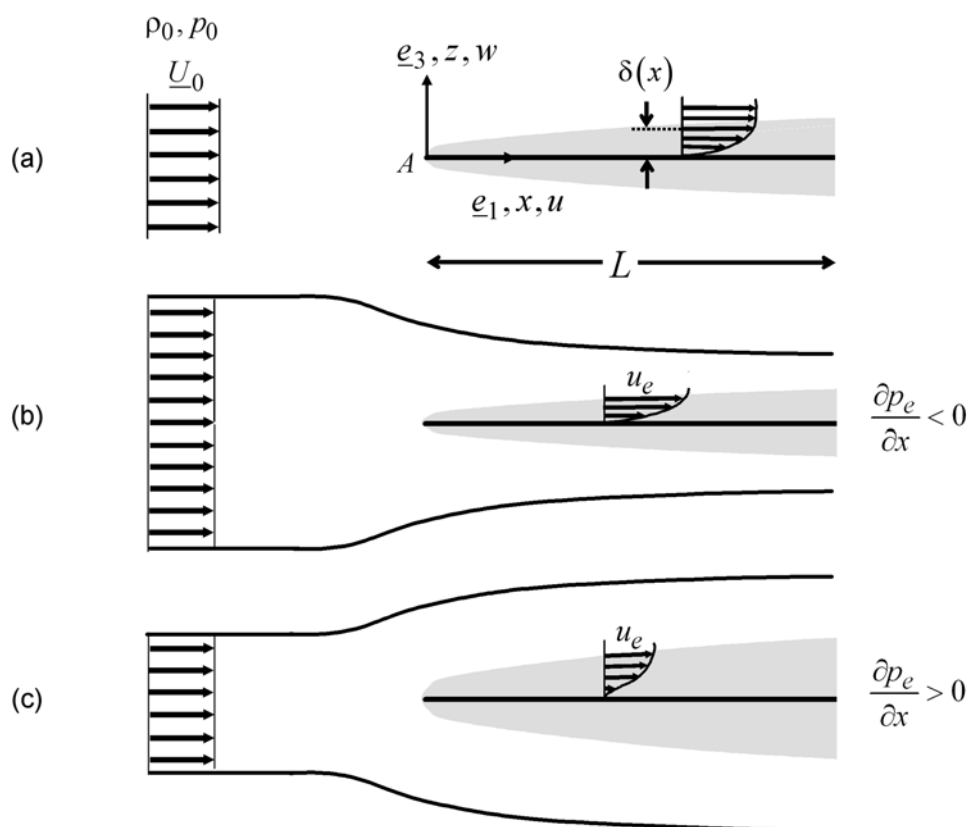


Figure 15.2 - Exemples de couches limites sur une plaque plane : (a) écoulement uniforme sans incidence, (b) écoulement sans incidence avec gradient de pression négatif, (c) écoulement sans incidence avec gradient de pression positif. La vitesse \underline{u}_e et la pression p_e correspondent aux valeurs obtenues sur la frontière de la couche limite. Elles correspondent à la solution de l'approximation du fluide parfait sur la surface de la plaque (voir texte).

➤ Hypothèses

Les écoulements de la figure **15.2** sont supposés **stationnaires** et **bidimensionnels**. Ils s'effectuent dans le plan $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_3)$ où leur vitesse vaut :

$$(15.2.1) \quad \underline{u}(\underline{x}) = u(x, z) \underline{e}_1 + w(x, z) \underline{e}_3$$

On suppose par ailleurs que ces écoulements sont ceux d'un **fluide incompressible homogène newtonien de masse volumique ρ_0 constante et de viscosité η constante**. Enfin, on **néglige les forces extérieures**.

➤ Equations

Compte tenu du jeu d'hypothèses ci-dessus, partant de **(8.3.15)**, l'équation de continuité et la loi de la dynamique fournissent les trois équations suivantes :

$$(15.2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

Comme vu au paragraphe **8.3** à propos du découplage dynamique-thermique, le fluide étant incompressible homogène de viscosité constante, ces équations sont découplées du problème thermique.

➤ Région extérieure : l'approximation du fluide parfait

Conformément au principe de séparation des échelles exposé dans le paragraphe précédent, nous allons appliquer aux équations **(15.2.2)** deux changements de variables successifs : l'un pour l'écoulement de fluide parfait, l'autre pour la couche limite. Nous commençons par le fluide parfait.

L'écoulement de fluide parfait autour de l'obstacle correspond à la solution des équations (15.2.2) dans lesquelles on élimine les termes visqueux. Les équations obtenues sont les équations d'Euler. Cette approximation revient à effectuer dans ces équations le changement de variables suivant :

$$(15.2.3) \quad \underline{x} = L \bar{x}, \underline{u} = U_0 \bar{u}, p = \delta p \bar{p}$$

où l'échelle δp sera déduite de l'examen des équations.

Remarque -

Nous avons effectué le même changement de variable sur \underline{x} et \underline{u} au **chapitre 8** pour obtenir l'approximation du fluide parfait pour un écoulement compressible, cf. (8.2.2). Pour la pression, nous avons alors posé $p = p_0 \bar{p}$. Mais ici le fluide étant incompressible, la pression thermodynamique p_0 n'est plus la bonne échelle car les variations de la pression dans un fluide incompressible sont de nature hydrodynamique et elles sont déterminées par le champ de vitesse (cf. (8.3.8) et les commentaires autour de cette équation).

Les variables sans dimension $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$ sont qualifiées de **variables extérieures** par opposition à l'écoulement « à l'intérieur » de la couche limite. En introduisant le changement de variable (15.2.3) dans les équations (15.2.2) on obtient dans un premier temps :

$$(15.2.4) \quad \begin{cases} \left(\frac{U_0}{L} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \\ \left(\frac{U_0^2}{L} \right) \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = - \left(\frac{\delta p}{\rho_0 L} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left(v \frac{U_0}{L^2} \right) \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] \\ \left(\frac{U_0^2}{L} \right) \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = - \left(\frac{\delta p}{\rho_0 L} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \left(v \frac{U_0}{L^2} \right) \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right] \end{cases}$$

où les variables « barrées » ainsi que les termes composés de ces variables sont supposés d'ordre 1. En divisant chaque équation par la dimension de son premier membre, on obtient :

$$(15.2.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = - \left(\frac{\delta p}{\rho_0 U_0^2} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = - \left(\frac{\delta p}{\rho_0 U_0^2} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

Etant entendu que l'action de la pression sur la dynamique du fluide ne peut jamais disparaître, le terme qui la traduit doit rester du même ordre que les termes dominants de l'équation (15.2.5). Si le nombre de Reynolds est grand, les termes dominants sont les termes du premier membre et ils sont d'ordre 1. L'échelle de pression δp doit donc vérifier :

$$(15.2.6) \quad \delta p = \rho_0 U_0^2$$

D'où :

$$(15.2.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

Donc, dans le cas où :

$$(15.2.8) \quad \text{Re} = \frac{U_0 L}{\nu} \gg 1,$$

on obtient les **équations d'Euler (8.4.10)** qui s'appliquent au fluide parfait :

$$(15.2.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \\ u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ u \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \end{cases}$$

Les conditions aux limites de ce système sont fixées tout d'abord par les **conditions amont** :

$$(15.2.10) \quad \bar{x} \rightarrow -\infty : \begin{cases} \bar{u} = e_1 \\ \bar{p} = \bar{p}_0 = p_0 / \rho_0 U_0^2 \end{cases},$$

À ces conditions on ajoute d'autres conditions aux limites qui permettent d'engendrer l'écoulement de fluide parfait requis. Pour cela, on peut fixer la pression dans une section aval et imposer un tube de courant extérieur particulier tel que l'un des deux schématisés sur les figures **15.2 (b)** ou **(c)**. Enfin, la condition qu'il convient d'appliquer sur la surface de la plaque plane est la **condition de glissement** (8.4.13) qui prévaut pour le fluide parfait. La plaque plane étant fixe, donc telle que $\underline{U} = 0$, il vient :

$$(15.2.11) \quad \underline{\bar{u}} \cdot \underline{n} = \bar{w} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{z} = 0 \quad - \text{ glissement}$$

La solution de ce système définit alors la **solution extérieure** du problème général (15.2.2), cela par opposition à la **solution intérieure** qui est celle que nous allons établir maintenant pour l'écoulement dans la « région intérieure » qui constitue la couche limite.

➤ La région intérieure : l'approximation de la couche limite

Pour décrire la région proche de la paroi d'épaisseur caractéristique δ où les effets visqueux redeviennent prépondérants, on effectue **un nouveau changement de variables** :

$$(15.2.12) \quad x = L \tilde{x}, z = \delta \tilde{z}, u = U_0 \tilde{u}, w = W \tilde{w}, p = \delta p \tilde{p}$$

Pour le rapport entre les deux échelles spatiales δ et L , on pose :

$$(15.2.13) \quad \bar{\delta}(\text{Re}) = \frac{\delta}{L}$$

Pour le champ de vitesse, on a distingué dans (15.2.12) l'échelle de vitesse horizontale U_0 et une échelle de vitesse verticale inconnue, notée W . L'échelle de pression δp doit de nouveau être déduite de l'examen des termes dominants des équations.

Les variables sans dimension « tildées » $(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{p})$ introduites par (15.2.12) caractérisent la région intérieure de la couche limite. Elles sont appelées **variables intérieures**. Notons que les échelles relatives à la direction horizontale e_1 sont identiques à celles du problème extérieur : $\tilde{x} = \bar{x}$, $\tilde{u} = \bar{u}$, cf. (15.2.3) et (15.2.12). En introduisant (15.2.12) dans les équations dimensionnelles (15.2.2), on obtient cette fois :

$$(15.2.14) \quad \begin{cases} \left(\frac{U_0}{L} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{W}{\delta} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \\ \left(\frac{U_0^2}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{U_0 W}{\delta} \right) \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = - \left(\frac{\delta p}{\rho_0 L} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \nu \left[\left(\frac{U_0}{L^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{U_0}{\delta^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right] \\ \left(\frac{U_0 W}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{W^2}{\delta} \right) \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = - \left(\frac{\delta p}{\rho_0 \delta} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \nu \left[\left(\frac{W}{L^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{W}{\delta^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right] \end{cases}$$

Soit encore, tenant compte de (15.2.13) :

$$(15.2.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{\bar{\delta}} \frac{W}{U_0} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{\bar{\delta}} \frac{W}{U_0} \right) \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = - \left(\frac{\delta p}{\rho_0 U_0^2} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{1}{\bar{\delta}^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right] \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{\bar{\delta}} \frac{W}{U_0} \right) \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = - \left(\frac{1}{\bar{\delta}} \frac{U_0}{W} \right) \left(\frac{\delta p}{\rho_0 U_0^2} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{1}{\bar{\delta}^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right] \end{cases}$$

➤ Continuité

Considérons tout d'abord la première de ces équations qui est l'**équation de continuité**. Contrairement au développement **temporel** d'un écoulement engendré par la translation d'une plaque plane traité au **chapitre 10** (premier problème de Stokes, cf. figure **10.8**), dans le problème du développement **spatial** d'un écoulement visqueux considéré ici le champ de vitesse n'est pas invariant dans la direction parallèle à la plaque : la vitesse u varie dans la direction x car sur toutes les lignes de courant qui pénètrent dans la couche limite le fluide l'écoulement subit une décélération progressive due au frottement. On doit donc conserver les deux termes de l'équation de continuité dans (15.2.15). Si l'on veut que cette équation ne dégénère pas vers l'équation $\partial \tilde{u} / \partial \tilde{x} = 0$, il faut alors que l'échelle W vérifie :

$$(15.2.16) \quad \boxed{\frac{W}{U_0} = \bar{\delta}(\text{Re})}$$

L'équation de continuité en variables intérieures est donc :

$$(15.2.17) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0$$

➤ Quantité de mouvement

En introduisant (15.2.16) dans les deux équations (15.2.15) qui traduisent la loi de la dynamique, on obtient :

$$(15.2.18) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = - \left(\frac{\delta p}{\rho_0 U_0^2} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{1}{\bar{\delta}^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right] \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = - \left(\frac{1}{\bar{\delta}^2} \frac{\delta p}{\rho_0 U_0^2} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{1}{\bar{\delta}^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right] \end{cases}$$

On s'intéresse au cas où le nombre de Reynolds est grand, cf. (15.2.8), auquel cas $\bar{\delta} \ll 1$, cf. (15.1.2). Analysons tour à tour quelles sont les conséquences d'une telle condition sur les équations du mouvement pour la composante \tilde{u} et pour la composante \tilde{w} ci-dessus.

✓ Dans l'équation de \tilde{u} (15.2.18), si $\bar{\delta} \ll 1$ la dérivée seconde selon \tilde{x} à l'intérieur du crochet du terme de diffusion visqueuse s'efface devant la dérivée seconde selon \tilde{z} . Si l'on veut maintenir le terme visqueux dans l'équation, **et il le faut car c'est le mécanisme clef de cet écoulement**, l'équilibre frottement-inertie nous oblige à poser :

$$(15.2.19) \quad \bar{\delta}^2 \text{Re} = 1$$

On retrouve ainsi la relation (15.1.7) :

$$(15.2.20) \quad \bar{\delta} = \text{Re}^{-1/2}$$

Quant au terme de pression, pour qu'il se maintienne dans l'équation de \tilde{u} on doit avoir de nouveau :

$$(15.2.21) \quad \frac{\delta p}{\rho_0 U_0^2} = 1$$

L'équation de \tilde{u} se réduit donc à :

$$(15.2.22) \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}$$

✓ Pour l'équation de \tilde{w} (15.2.18), compte tenu de (15.2.19) et (15.2.21), on obtient :

$$(15.2.23) \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = - \left(\frac{1}{\bar{\delta}^2} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2}$$

Dans cette équation, lorsque $\bar{\delta} \ll 1$ le terme de pression domine largement les autres. Cette équation se réduit donc à :

$$(15.2.24) \quad \boxed{\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = 0}$$

On aboutit ainsi au résultat important suivant :

La pression est invariante à travers une couche limite sur une plaque plane.

Remarques -

- Cela valide en particulier le principe de la mesure de la pression statique p avec une antenne de Prandtl comme expliqué au **chapitre 11** à propos de la figure **11.5**.
- Si l'on raisonnait d'abord sur l'équation de \tilde{w} avant d'analyser l'équation de \tilde{u} , conformément à l'équation de \tilde{w} (15.2.18) on en conclurait que la condition $\delta p = \bar{\delta}^2 \rho_0 U_0^2$ suffit pour conserver le terme de pression dans cette équation. Mais dans ce cas le gradient de pression disparaît de l'équation de \tilde{u} . Cela n'est pas admissible sur le plan physique car les « particules de fluide » issues du fluide parfait qui pénètrent dans la couche limite à une faible hauteur par rapport à la plaque solide ($\tilde{z} = O(1)$) sont pratiquement stoppées par le frottement. La variation de pression obtenue sur ces lignes de courant est donc bien d'ordre $\rho_0 U_0^2$.

On obtient en définitive le système adimensionnel suivant :

$$(15.2.25) \quad \boxed{\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \\ 0 = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \end{cases}}$$

➤ **Conditions aux limites : adhérence**

Le champ de vitesse **intérieur** (\tilde{u}, \tilde{w}) vérifie maintenant, par construction, la condition d'adhérence :

$$(15.2.26) \quad \boxed{\tilde{u} = \tilde{w} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq \tilde{x} \leq 1, \tilde{z} = 0 \quad - \text{ adhérence}}$$

➤ **Conditions aux limites : règle de raccord**

Les autres conditions aux limites doivent raccorder au niveau de la frontière de la couche limite les deux approximations du problème, celle de l'écoulement de couche limite à celle de l'écoulement de fluide parfait.

Pour cela nous devons tout d'abord définir la frontière de la couche limite, et cela dans chacun des deux jeux de variables utilisés, les variables extérieures et les variables intérieures. Pour la coordonnée verticale z , d'après (15.2.3), (15.2.12) et (15.2.13) on a :

$$(15.2.27) \quad \begin{cases} z = \bar{z} L = \tilde{z} \delta \\ \delta = \bar{\delta}(\text{Re}) L \end{cases}$$

La **frontière de la couche limite** est donc définie comme suit :

✓ pour le **problème extérieur** (fluide parfait) :

$$(15.2.28) \quad \bar{z} = \tilde{z} \bar{\delta}(\text{Re}) \quad \text{avec } \tilde{z} = O(1) ;$$

✓ pour le **problème intérieur** (couche limite) :

$$(15.2.29) \quad \tilde{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{\delta}(\text{Re})} \quad \text{avec } \bar{z} = O(1)$$

Pour $Re \rightarrow \infty$, puisque $\bar{\delta}(Re) \rightarrow 0$, les conditions aux limites cherchées sont donc définies par une **règle raccord** qui s'énonce de la façon suivante :

$$(15.2.30) \quad \begin{aligned} & \lim_{\tilde{z} \rightarrow \infty} [U_0 \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{z}), W \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{z}), \rho_0 U_0^2 \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{z})] \\ &= \lim_{\bar{z} \rightarrow 0} [U_0 \bar{u}(\bar{x}, \bar{z}), U_0 \bar{w}(\bar{x}, \bar{z}), \rho_0 U_0^2 \bar{p}(\bar{x}, \bar{z})] \end{aligned}$$

Tenant compte du fait que $W = \bar{\delta} U_0$, cf. (15.2.16), après simplification par U_0 pour la vitesse et par $\rho_0 U_0^2$ pour la pression, cette règle devient :

$$(15.2.31) \quad \lim_{\tilde{z} \rightarrow \infty} [\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{z}), \bar{\delta} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{z}), \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{z})] = \lim_{\bar{z} \rightarrow 0} [\bar{u}(\bar{x}, \bar{z}), \bar{w}(\bar{x}, \bar{z}), \bar{p}(\bar{x}, \bar{z})]$$

Si l'on désigne alors par :

$$(15.2.32) \quad [\bar{u}_e(\bar{x}), \bar{w}_e(\bar{x}), \bar{p}_e(\bar{x})] \equiv [\bar{u}(\bar{x}, 0), \bar{w}(\bar{x}, 0), \bar{p}(\bar{x}, 0)],$$

les distributions des composantes de la vitesse et de la pression induites sur la plaque plane par l'écoulement de fluide parfait, la **règle de raccord** (15.2.30) s'écrit finalement sous la forme :

$$(15.2.33) \quad \boxed{\lim_{\tilde{z} \rightarrow \infty} [\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{z}), \bar{\delta} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{z}), \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{z})] = [\bar{u}_e(\bar{x}), \bar{w}_e(\bar{x}), \bar{p}_e(\bar{x})]}$$

Les conditions de raccord sur la composante u de la vitesse et sur la pression vont nous permettre de résoudre le problème intérieur.

Remarque -

On vérifie que la condition sur w correspond à la condition de glissement qui s'applique au fluide parfait :

$$(15.2.34) \quad \lim_{\tilde{z} \rightarrow \infty} [\bar{\delta} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{z})] = \lim_{Re \rightarrow \infty} \bar{\delta}(Re) \times \lim_{\tilde{z} \rightarrow \infty} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \bar{w}_e(\bar{x}) = 0$$

Ainsi, pour $Re \gg 1$, l'ensemble formé par :

- ✓ les équations (15.2.9) du problème extérieur (approximation du fluide parfait),
- ✓ les équations (15.2.25) du problème intérieur (approximation de la couche limite),
- ✓ les conditions aux limites du problème extérieur, comprenant notamment (15.2.10) (conditions aux limites amont) et (15.2.11) (glissement),
- ✓ les conditions aux limites du problème intérieur (15.2.26) (adhérence) et (15.2.33) (règle de raccord),

constitue une **approximation uniformément valable** pour tout l'écoulement. Cette approximation respecte maintenant la condition d'adhérence grâce à l'approximation de la couche limite. Cela formalise le caractère indissociable du modèle du fluide parfait et du modèle de la couche limite que nous avons souligné dans le tableau 8.2 du **chapitre 8**.

➤ Les équations de Prandtl

Puisque la pression se conserve à la traversée de la couche limite, cf. (15.2.24), compte tenu de la condition de raccord sur la pression (15.2.33) on a $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{x} = \partial \bar{p}_e / \partial \tilde{x}$. Soit, puisque $\tilde{x} = \bar{x}$: $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{x} = \partial \bar{p}_e / \partial \bar{x}$. Les équations (15.2.25) se réduisent alors à la seule équation :

$$(15.2.35) \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = - \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}$$

On peut aussi exprimer le gradient de pression en fonction de la vitesse \bar{u}_e puisque sur la plaque, pour $0 \leq \bar{x} \leq 1$, $\bar{z} = 0$, compte tenu de (15.2.9), (15.2.11) et (15.2.32), on a :

$$(15.2.36) \quad \bar{u}_e \frac{d \bar{u}_e}{d \bar{x}} = - \frac{d \bar{p}_e}{d \bar{x}}$$

Remarque -

Notons que cette relation correspond au premier théorème de Bernoulli $\bar{p}_e + \frac{1}{2} \bar{u}_e^2 = \text{const.}$, soit sous forme dimensionnelle : $p_e + \frac{1}{2} u_e^2 = \text{const.}$.

Puisque $\bar{x} = \tilde{x}$, (15.2.35) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$(15.2.37) \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = \bar{u}_e \frac{d\bar{u}_e}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}$$

Les conditions aux limites de cette équation sont, cf. (15.2.26) et (15.2.33) :

$$(15.2.38) \quad \begin{cases} \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{z}) = 0 & \text{pour } 0 \leq \tilde{x} = \bar{x} \leq 1, \tilde{z} = 0 & - \text{ adhérence} \\ \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \bar{u}_e(\bar{x}) & \text{pour } 0 \leq \tilde{x} = \bar{x} \leq 1, \tilde{z} \rightarrow \infty & - \text{ règle de raccord} \end{cases}$$

Le retour aux **variables dimensionnelles** aboutit aux **équations de Prandtl** (L. Prandtl 1904).

Equations de Prandtl -

$$(15.2.39) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{cases}$$

$$(15.2.40) \quad \begin{cases} u = w = 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq L, z = 0 & - \text{ adhérence} \\ u = u_e(x) & \text{pour } 0 \leq x \leq L, z \rightarrow \infty & - \text{ règle de raccord} \end{cases}$$

Ces équations caractérisent donc une **couche limite stationnaire sur une plaque plane plongée dans un écoulement de fluide newtonien incompressible homogène de viscosité constante, sans force extérieure**.

Rappelons que la vitesse $u_e(x)$ qui détermine la condition de raccord (15.2.40) désigne la vitesse induite par l'ensemble de l'écoulement de fluide parfait (le champ « extérieur ») sur la surface de courant qui coïncide avec la surface de la plaque plane. Dans les ouvrages classiques, cette vitesse est souvent appelée **vitesse extérieure**. Nous préférons utiliser quant à nous l'expression **vitesse de raccord** qui trace de manière un peu plus précise l'origine de cette variable dans la théorie de la couche limite.

➤ Synthèse

Pour $Re \gg 1$, le problème d'une couche limite sur une plaque plane est maintenant correctement représenté par la superposition de deux approximations qui se raccordent entre elles. La démarche suivie est représentée de manière synthétique sur la figure 15.3 ci-dessous.

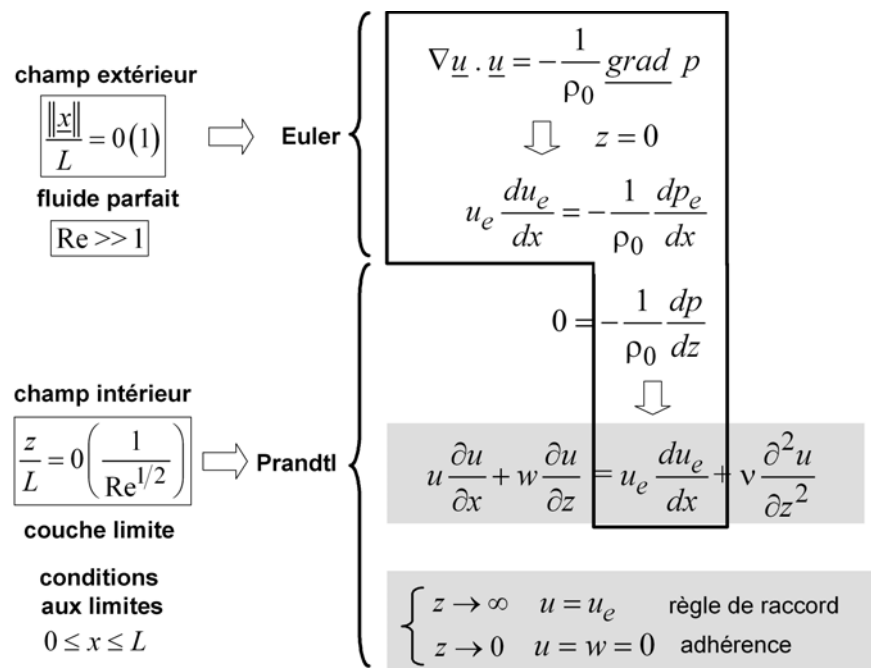


Figure 15.3 - Couplage entre le fluide parfait et la couche limite.

Les principales étapes de la démarche suivie sont les suivantes :

- ✓ Pour $Re \gg 1$, l'écoulement obtenu en analysant le problème sur l'échelle L de l'objet est un écoulement de fluide parfait. Cet écoulement impose le champ de pression dans l'ensemble du domaine occupé par le fluide.
- ✓ Lorsqu'on se concentre sur la couche limite définie comme une région d'épaisseur $\delta(Re) = L/Re^{1/2}$ au-dessus de la paroi, dans la limite $Re \rightarrow \infty$ la pression du fluide demeure celle de l'écoulement de fluide parfait, et le champ de vitesse est décrit par l'équation de Prandtl (15.2.39) relative à la composante u de la vitesse parallèle à la paroi.
- ✓ La solution du problème de fluide parfait influence alors la solution de l'écoulement de couche limite à travers la vitesse u_e de cet écoulement sur la paroi (ou, de manière équivalente, à travers sa pression).

- ✓ La valeur de cette vitesse, appelée **vitesse de raccord**, correspond à la condition aux limites de l'approximation de l'écoulement de couche limite sur sa frontière supérieure avec l'écoulement de fluide parfait.
- ✓ L'autre condition aux limites qui s'applique à cet écoulement est l'**adhérence**. C'est la première relation (15.2.40). La présence de la couche limite permet d'assurer cette dernière condition que l'approximation de fluide parfait ne peut pas vérifier.

➤ Effet de la courbure

On peut montrer que la théorie ci-dessus peut être étendue au cas d'une couche limite sur un obstacle solide bidimensionnel quelconque, par exemple celui schématisé sur la figure 15.1, cela dans la mesure où le **rayon de courbure local** \mathcal{R}_S de la surface solide sur laquelle se développe la couche limite **est grand devant l'épaisseur locale de la couche limite** :

$$(15.2.41) \quad \frac{\delta(s)}{\mathcal{R}_S} \ll 1$$

Dans ce cas, on peut montrer que tous les termes induits par la courbure dans les équations de la quantité de mouvement de la couche limite s'effacent à l'ordre dominant.

15.3 Le cas d'une plaque plane dans un écoulement sans gradient de pression : la solution autosemblable de Blasius

On considère ici le cas de la figure 15.2 (a) relatif à un écoulement extérieur uniforme, pour lequel $p_e = p_0 = \text{const.}$, $u_e = U_0 = \text{const.}$. Les équations de Prandtl (15.2.39)-(15.2.40) deviennent :

Equations de Prandtl : cas d'une couche limite dans un écoulement de fluide incompressible homogène uniforme de viscosité constante sans force extérieure

$$(15.3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{cases}$$

(15.3.2)	$\begin{cases} u = w = 0, \text{ pour } 0 \leq x \leq L, z = 0 & \text{- adhérence} \\ u(x, z) = U_0 \text{ pour } z \rightarrow \infty & \text{- raccord à un écoulement uniforme} \end{cases}$
----------	--

Étant donnés U_0 et ν , l'hypothèse d'un grand nombre de Reynolds (15.2.8) pour laquelle le système d'équations ci-dessus s'applique revient à considérer le cas d'une **plaque plane semi-infinie**, soit $L \rightarrow \infty$. Dans cette limite, le seul paramètre de longueur du problème disparaît. Cela permet d'envisager l'existence d'une **solution autosemblable** comme dans le premier problème de Stokes traité au paragraphe 10.7 du chapitre 10.

Remarque -

Notons que le premier problème de Stokes a trait au développement **temporel** d'une couche cisailée visqueuse, cf. figure 10.8. Dans le problème du développement **spatial** d'une couche cisailée que nous analysons ici, la variable d'espace x joue le même rôle que le temps dans le problème précédent.

Nous allons donc appliquer aux équations (15.3.1), (15.3.2) la technique de recherche d'une solution autosemblable enseignée au chapitre 10. Au préalable, il convient de mettre le système (15.3.1) sous la forme d'une équation différentielle scalaire en exprimant comme vu au chapitre 2 les deux composantes de la vitesse en fonction de la fonction de courant ψ . Conformément à (2.12.13), on pose :

$$(15.3.3) \quad u(x, z) = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w(x, z) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En introduisant cette décomposition dans (15.3.1), l'équation de continuité est automatiquement vérifiée et seule la loi de la dynamique subsiste. En fonction de ψ , elle s'écrit :

$$(15.3.4) \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3}$$

Les conditions aux limites (15.3.2) deviennent :

$$(15.3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, z=0) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, z=0) = 0 \\ \Rightarrow \psi(x, z=0) = \text{const.} = 0 \end{array} \right\} - \text{adhérence}$$

$$\left[\psi(x, z \rightarrow \infty) \sim U_0 z \right] - \text{raccord à un écoulement uniforme}$$

On déroule alors pour l'équation (15.3.4) la méthode de recherche d'une solution autosemblable détaillée au paragraphe 10.7 du chapitre 10.

Étape 1 - On effectue sur les **variables et paramètres** du problème initial, ici (ψ, x, z, U_0, v) , le changement de variable correspondant à la transformation affine suivante :

$$(15.3.6) \quad u = a \hat{\psi}, x = b \hat{x}, z = c \hat{z}, U_0 = d \hat{U}_0, v = e \hat{v}$$

où (a, b, c, d, e) désignent cinq facteurs multiplicatifs arbitraires. Le problème (15.3.4)-(15.3.5) devient :

$$(15.3.7) \quad \left(\frac{a^2}{bc^2} \right) \left[\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{z}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right] \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{z}} = \left(\frac{ae}{c^3} \right) \hat{v} \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial \hat{z}^3}$$

$$(15.3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{a}{c} \right) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{z}}(\hat{x}, \hat{z}=0) = 0 \\ a \hat{\psi}(\hat{x}, \hat{z}=0) = 0 \end{array} \right\} - \text{adhérence}$$

$$\left[a \hat{\psi}(\hat{x}, \hat{z} \rightarrow \infty) \sim (d c) \hat{U}_0 \hat{z} \right] - \text{raccord à un écoulement uniforme}$$

Étape 2 - En s'appuyant sur le **principe d'invariance dimensionnelle**, on cherche parmi les groupes de transformation multiplicatifs (a, b, c, d, e) ceux qui laissent le problème initial (15.3.4) - (15.3.5) invariant dans cette transformation. Compte tenu de (15.3.7) et (15.3.8) cette classe de transformations doit vérifier les deux relations suivantes :

$$(15.3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{e}{c} \\ a = d c \end{array} \right.$$

Il y a donc trois facteurs libres parmi les cinq qui définissent le groupe de transformation.

Étape 3 - Toujours selon le principe d'invariance dimensionnelle, si $\mathcal{F}(\psi, x, z, U_0, v) = 0$ désigne la solution du problème initial, après application de cette transformation, on doit avoir aussi $\tilde{\mathcal{F}}(\hat{\psi}, \hat{x}, \hat{z}, \hat{U}_0, \hat{v}) = 0$:

$$(15.3.10) \quad \mathcal{F}(\psi, x, z, U_0, v) = 0 \Leftrightarrow \hat{\mathcal{F}}(\hat{\psi}, \hat{x}, \hat{z}, \hat{U}_0, \hat{v}) = 0$$

La solution cherchée vérifie donc :

$$(15.3.11) \quad \hat{\mathcal{F}}\left(\hat{\psi} = \frac{\Psi}{a}, \hat{x} = \frac{x}{b}, \hat{z} = \frac{z}{c}, \hat{U} = \frac{U_0}{d}, \hat{v} = \frac{v}{e}\right) = 0$$

En appliquant la technique préconisée au chapitre 10, §10.7, si l'on choisit les trois facteurs libres parmi les variables et paramètres du problème, soit par exemple :

$$(15.3.12) \quad \begin{cases} b = x \\ d = U_0, \\ e = v \end{cases}$$

il reste à déterminer a et c . À partir de (15.3.9) on obtient :

$$(15.3.13) \quad \begin{cases} c^2 = \frac{eb}{d} = \frac{vx}{U_0} \\ a = cd = \sqrt{vU_0x} \end{cases}$$

La solution (15.3.11) vérifie donc :

$$(15.3.14) \quad \hat{\mathcal{F}}\left(\hat{\psi} = \frac{\Psi}{\sqrt{vU_0x}}, 1, \hat{z} = \frac{z}{\sqrt{vx/U_0}}, 1, 1\right) = 0$$

D'où la forme **autosemblable** :

$$(15.3.15) \quad \psi = \sqrt{vU_0x} f\left(\eta = \frac{z}{\sqrt{vx/U_0}}\right)$$

Remarque - La méthode rigoureuse qui permet d'aboutir à ce type de résultat a été présentée au chapitre 10, §10.7.

La variable de similitude du problème est donc :

$$(15.3.16) \quad \eta = \frac{z}{\delta(x)}$$

où l'échelle $\delta(x)$ caractérise l'épaisseur locale de la couche limite. Cette échelle vaut :

$$(15.3.17) \quad \delta(x) = \left(\frac{\nu x}{U_0} \right)^{1/2} = \frac{x}{\text{Re}_x^{1/2}},$$

avec :

$$(15.3.18) \quad \text{Re}_x = \frac{U_0 x}{\nu},$$

le nombre de Reynolds construit sur la distance de développement x .

En reportant alors (15.3.15) dans le système (15.3.4)-(15.3.5) on obtient l'équation différentielle ordinaire et les conditions aux limites suivantes :

Equation de Blasius

$$(15.3.19) \quad \begin{cases} 2f''' + ff'' = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0 \\ f'(\infty) = 1 \end{cases}$$

L'équation différentielle ci-dessus porte le nom d'**équation de Blasius** (H. Blasius 1907),

Remarque -

- On laissera au lecteur le soin de retrouver cette équation. On pourra se reporter pour cela à la démonstration de l'équation (10.7.17) effectuée au **chapitre 10**.

- Notons qu'en (15.3.19) la dernière condition aux limites (15.3.5) $\psi(x, z \rightarrow \infty) \sim U_0 z$ est écrite ici sous la forme : $\lim_{z \rightarrow \infty} (\partial \psi / \partial z) / U_0 = \sqrt{vx/U_0} \times \partial \eta / \partial z \times f' = f' = 1$.

Pour les deux composantes de la vitesse, cf. (15.3.3), on trouve :

$$(15.3.20) \quad \begin{cases} \frac{u(x, z)}{U_0} = \frac{1}{U_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} = f'(\eta) \\ \frac{w(x, z)}{U_0} = -\frac{1}{U_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Re}_x^{1/2}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \end{cases}$$

Le système (15.3.19) doit être résolu numériquement. La solution obtenue pour u est tracée sur la figure 15.4 (a) ci-dessous. Elle définit le **profil de la couche limite de Blasius**. Comme le suggère le cliché de figure 15.4 (b) où le profil de la vitesse u d'une couche limite est visualisé au moyen d'une technique électrolytique (voir légende), cette théorie est validée par l'expérience.

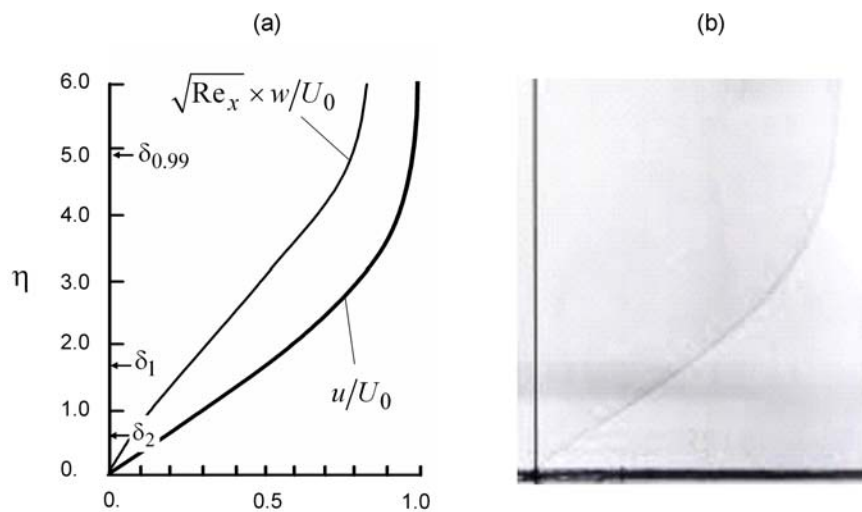


Figure 15.4 - Profils autosemblables des composantes u et w de la vitesse dans la couche limite d'une plaque plane sans gradient de pression : (a) solution de Blasius, (b) cliché instantané du déplacement d'une ligne de micro bulles d'hydrogène émise par l'électrolyse d'un fil métallique vertical visible à gauche de la photo (Van Dyke, 1982). Les échelles $\delta_{0,99}$, δ_1 et δ_2 indiquées sur la figure (a) correspondent respectivement à l'épaisseur physique, à l'épaisseur de déplacement et à l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite. Ces différentes échelles sont définies plus loin dans le texte.

Quant à la vitesse verticale, on trouve qu'elle vérifie :

$$(15.3.21) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(\text{Re}_x^{1/2} \frac{w}{U_0} \right) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \approx 0.86$$

15.4 L'effet d'un gradient de pression

➤ Introduction

Le problème de la plaque plane dans un écoulement uniforme que décrit l'équation de Blasius (15.3.19) traite d'une situation canonique (plaque plane, écoulement extérieur uniforme). En pratique, les solutions de fluide parfait auxquelles se raccorde un écoulement de couche limite peuvent être très diverses. Dans de nombreux cas la vitesse de raccord u_e n'est pas constante. Deux exemples ont été choisis sur la figure 15.2 où l'on a considéré le cas d'un écoulement accéléré, cf. figure 15.2 (b), ou décéléré, cf. figure 15.2 (c).

Un autre exemple est celui de l'écoulement acyclique autour d'un cylindre dont l'approximation du fluide parfait a été traitée au chapitre 13. Le champ de vitesse de l'approximation potentielle de cet écoulement est donné en (13.5.16). En posant $r = a$ dans ces formules on conclut que la couche limite sur le cylindre est soumise aux effets successifs d'une vitesse de raccord valant $u_e = u(a, \theta) = -2U_0 \sin \theta$. La vitesse de raccord que l'on doit considérer augmente donc de la valeur zéro jusqu'au double de U_0 entre le point d'arrêt amont et les flancs du cylindre ; puis elle décroît de façon symétrique à l'arrière du cylindre. Nous avons vu alors sur le cliché de la figure 13.7 (a) que le modèle du fluide parfait était totalement mis en échec dans le cas de cet écoulement. En effet, dans la partie arrière du cylindre, là où le gradient de pression s'inverse et ralentit l'écoulement, on constate que la frontière de la couche limite s'éloigne brutalement de la surface de l'objet. Ce phénomène porte le nom de **décollement de la couche limite**.

La compréhension du comportement d'une couche limite en réaction à une condition de raccord variable est donc primordiale. Nous allons voir ce que nous enseignent alors les équations de Prandtl concernant les aspects physiques de ce problème. Nous présenterons ensuite, dans un approfondissement, une seconde solution autosemblable valable pour ce type de conditions.

➤ **Les effets d'un gradient de pression sur une couche limite : aspects qualitatifs**

La variation de la vitesse de raccord u_e reflète l'influence du gradient de la pression p_e qui s'applique dans toute l'épaisseur d'une couche limite. Pour expliquer comment cette dernière réagit aux variations de p_e , il nous faut revenir sur la figure **15.2** du début de ce chapitre. Comme schématisé sur la figure **15.2 (b)** (resp. **15.2 (c)**) une couche limite soumise à un gradient de pression négatif $dp_e/dx < 0$ (resp. positif $dp_e/dx > 0$) est entraînée par une vitesse de raccord u_e qui augmente (resp. qui diminue) avec x . L'expérience montre alors que, comparée à celle de l'écoulement de Blasius de la figure **15.2 (a)**, la couche limite s'amincit (resp. s'épaissit). Le profil de la vitesse u se déforme alors d'une manière que l'on peut caractériser comme suit.

Au contact de la paroi, la condition d'adhérence **(15.2.40)** élimine le premier membre de l'équation de Prandtl sur u **(15.2.39)**. Cette équation se réduit à :

$$(15.4.1) \quad 0 = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, 0)$$

Soit, si l'on choisit plutôt le gradient de pression en lieu et place du terme d'inertie extérieur, cf. **(15.2.36)** :

$$(15.4.2) \quad 0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, 0)$$

On en conclut que le signe du gradient de pression détermine celui de la **courbure du profil de vitesse à la paroi** conformément à la relation :

$$(15.4.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, 0) = \frac{1}{\eta} \frac{dp_e}{dx}$$

La **pente** du profil en $z = 0$ détermine quant à elle le **frottement pariétal** :

$$(15.4.4) \quad \tau_p(x) = \eta \frac{\partial u}{\partial z}(x, z = 0)$$

Comme illustré par exemple par le profil de u de la solution de Blasius sur la figure 15.4, on note par ailleurs que pour $z \rightarrow \infty$ la courbure est forcément négative puisque le profil de vitesse devient tangent à la valeur u_e . Puisque selon l'équation (15.4.3) la courbure du profil à la paroi est du même signe que le gradient de pression, si ce dernier est **positif**, comme dans le cas de la figure 15.2 (c), le profil de la vitesse u contient alors forcément un point d'inflexion. Cela est schématisé par la courbe tracée en pointillés sur la figure 15.5 ci-dessous. Dans le cas où le gradient de pression est négatif, comme dans le cas de la figure 15.2 (b), la courbure du profil de vitesse est monotone et le profil présente l'allure schématisée par la ligne en traits tirés sur la figure 15.5.

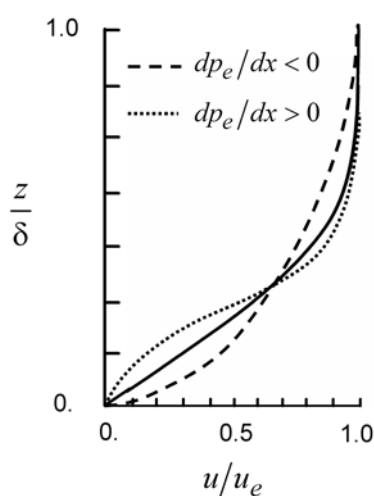


Figure 15.5 - Allures caractéristiques du profil de vitesse longitudinale d'une couche limite en présence d'un gradient de pression. Le profil en trait plein correspond à la solution de Blasius ($p_e = p_0 = \text{const.}$). Le signe du gradient de pression détermine celui de la courbure du profil à la paroi (voir texte ; l'échelle δ correspond à l'échelle physique $\delta_{0,99}$ définie plus loin en (15.5.1).

Par ailleurs, le développement limité de la vitesse u en $z = 0$ permet d'écrire :

$$(15.4.5) \quad u(x, z) = z \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) + \dots,$$

Remarque -

Le premier terme du développement limité est nul puisque par adhérence $u(x, 0) = 0$.

Soit, en introduisant le frottement pariétal (15.4.4) :

$$(15.4.6) \quad u(x, z) = z \frac{\tau_p(x)}{\eta} + O(z^2)$$

Ainsi, comme le résume de manière schématique la figure 15.5 ci-dessus :

Dans une couche limite, un gradient de pression longitudinal positif (resp. négatif) induit une décélération (resp. une accélération) du fluide dans la région de couche limite proche de la paroi, d'où une réduction (resp. une augmentation) du frottement pariétal de cette couche limite.

➤ Le décollement

On peut alors expliquer qualitativement le phénomène du décollement de couche limite comme suit. On s'appuie sur la figure 15.6 ci-dessous. Si l'on considère le cas d'une couche limite plongée dans un écoulement de fluide parfait dans lequel le gradient longitudinal de la pression est à la fois positif et croissant avec la distance x , comme sur la partie arrière d'un cylindre par exemple, partant d'une situation donnée (un profil de Blasius par exemple), en progressant vers l'aval la couche limite voit son frottement pariétal et sa vitesse longitudinale diminuer jusqu'à la situation critique où le frottement s'annule. Au delà de cette position, le processus se poursuit ce qui entraîne un changement de signe de la vitesse, donc le développement d'un écoulement à contre courant dans la région de couche limite proche de la paroi. Le point où le frottement s'annule correspond au **point de décollement**.

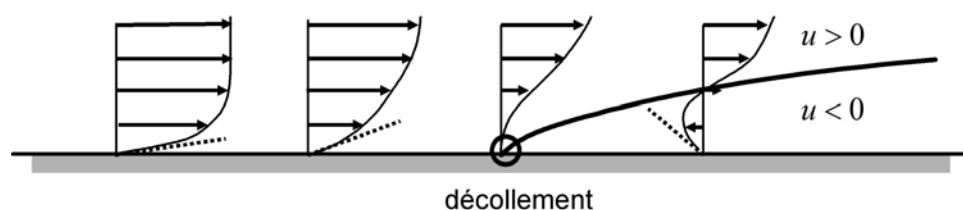


Figure 15.6 - Allure caractéristique des profils de la vitesse u dans une couche limite soumise à un gradient de pression positif croissant dans la direction aval, et occurrence d'un décollement.

➤ Le coefficient de frottement et le coefficient de traînée d'une couche limite

Comme nous le précisons dans l'annexe A15.1, on peut caractériser l'effet local du frottement pariétal sur une plaque plane par un **coefficient de frottement**, défini comme :

$$(15.4.7) \quad c_f(x) \equiv \frac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2}$$

où $\tau_p(x)$ est le frottement pariétal défini en (15.4.4). Son effet global sur la plaque plane est mesuré par un **coefficient de traînée**, cf. (A15.1.12) :

$$(15.4.8) \quad C_D = \frac{1}{L} \int_0^L c_f(x) dx$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire de fluide incompressible sur une plaque plane semi-infinie sans incidence (solution de Blasius), à partir de l'expression de la vitesse u (15.3.20) et de celle de la variable de similitude η , cf. (15.3.16), (15.3.17), on obtient pour le frottement pariétal :

$$(15.4.9) \quad \tau_p(x) = \frac{\rho_0 U_0^2}{\text{Re}_x^{1/2}} f''(0)$$

Soit pour le coefficient de frottement c_f défini plus haut :

$$(15.4.10) \quad c_f(x) = \frac{2}{\text{Re}_x^{1/2}} f''(0)$$

L'application numérique donne $f''(0) = 0.332$. Donc :

$$(15.4.11) \quad c_f(x) = \frac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2} = \frac{0.664}{\text{Re}_x^{1/2}}$$

Pour le coefficient de traînée (15.4.8) on obtient :

$$(15.4.12) \quad C_D = \frac{1.328}{\sqrt{U_0 L / \nu}} = \frac{1.328}{\text{Re}^{1/2}}$$

➤ Approfondissement ** - La solution autosemblable de Falkner-Skan

Il existe une forme plus générale de la solution de Blasius qui est valable pour une vitesse de raccord $u_e(x)$ variable. Cette solution, découverte par V.W. Falkner et S.W. Skan (1931) permet de caractériser l'effet d'un gradient de pression sur le profil d'une couche limite que nous venons de décrire qualitativement ci-dessus. La vitesse de raccord qui aboutit à cette solution autosemblable est de la forme :

$$(15.4.13) \quad u_e(x) = c x^m,$$

où c est une constante réelle. On peut montrer que cette loi correspond à la vitesse induite par l'écoulement potentiel sur l'arrête d'un dièdre de demi angle au sommet $\theta = \beta \pi / 2$ tel que :

$$(15.4.14) \quad \beta = \frac{2m}{m+1},$$

Cette situation est schématisée sur la figure 15.7 ci-dessous.

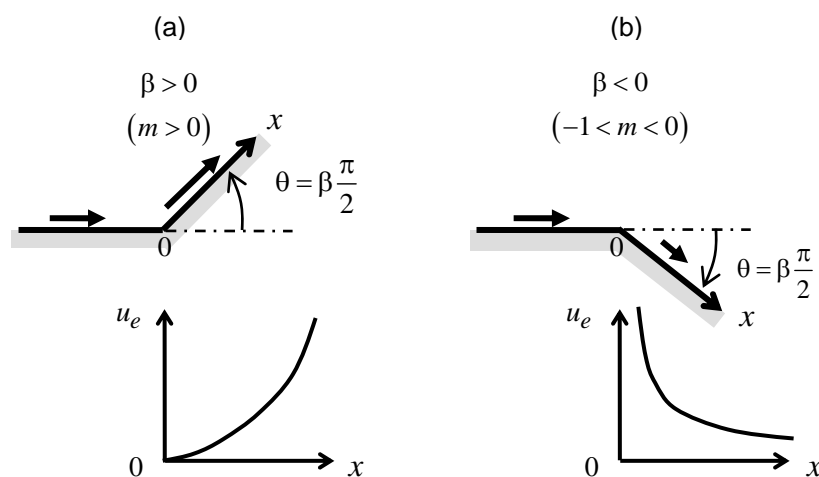


Figure 15.7 - Vitesses de raccord $u_e(x) = c x^m$ engendrées par un écoulement potentiel autour d'un dièdre pour deux valeurs du demi angle au sommet $\beta \pi / 2$ tel que $\beta = 2m / (m+1)$.

La solution de Blasius correspond à $m = \beta = 0$. Le signe de l'exposant m détermine celui du gradient de pression. Ce dernier vaut en effet, cf. (15.2.36) :

$$(15.4.15) \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_e}{dx} = -u_e \frac{du_e}{dx} = -mc^2 x^{2m-1}$$

Si $m > 0$, le gradient de pression est négatif et l'écoulement isovolume accélère pour franchir l'obstacle représenté par la seconde arrête sur la figure **15.7 (a)**. Si $m < 0$, le gradient de pression est positif et l'écoulement décélère afin d'occuper le volume libéré par l'orientation de la seconde arrête sur la figure **15.7 (b)**. Si l'on se situe à des distances x du point origine O du dièdre, telles que :

$$(15.4.16) \quad \text{Re}_x = \frac{u_e x}{\nu} = \frac{c x^{m+1}}{\nu} \gg 1,$$

la démarche qui aboutit à l'équation de Prandtl (**15.2.39**) est applicable. On recherche alors une solution autosemblable pour la fonction de courant, de la forme :

$$(15.4.17) \quad \psi = \sqrt{\nu u_e(x)} x \times f(\eta) = \sqrt{\nu c} x^{\frac{m+1}{2}} \times f(\eta)$$

où la variable de similitude vaut :

$$(15.4.18) \quad \begin{cases} \eta = \frac{z}{\delta(x)} \\ \delta(x) = \frac{x}{\text{Re}_x^{1/2}} = \sqrt{\frac{\nu}{c}} x^{\frac{1-m}{2}} \end{cases}$$

En remplaçant (**15.4.17**) dans l'équation de ψ (**15.3.4**) dans laquelle on ajoute au second membre le gradient de pression (**15.4.15**), on aboutit au système suivant :

$$(15.4.19) \quad \begin{cases} f''' + \frac{1}{2}(m+1)f f'' + m(1-f'^2) = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0 \\ f'(\infty) = 1 \end{cases}$$

Ce sont les **équations de Falkner-Skan**.

Remarques -

- On laissera au lecteur le soin de démontrer (**15.4.19**).
- On vérifie bien que l'on retrouve l'équation de Blasius (**15.3.19**) pour $m = 0$

- si l'on pose $\delta(x) = \sqrt{2/(m+1)} x / \text{Re}_x^{1/2}$ pour l'épaisseur $\delta(x)$ dans la définition (15.4.18) de la variable de similitude, on peut écrire alors l'équation différentielle ordinaire sous la forme $f''' + f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0$ avec $\beta = 2m/(m+1)$.

Quelques solutions de cette équation, obtenues par voie numérique, sont tracées sur la figure 15.8 ci-dessous. En dehors de la solution de Blasius $m = \beta = 0$, on obtient deux autres solutions remarquables.

✓ La première de ces solutions correspond à $m = -0.09043$, $\beta = -0.19884$. Pour cette valeur de m , le frottement pariétal τ_p s'annule. Cela correspond à la naissance d'un décollement de la couche limite, cf. figure 15.6. Comme tracé sur la figure 15.8, la résolution de l'équation de Falkner-Skan donne alors deux solutions symétriques de part et d'autre de cette solution particulière.

✓ Une deuxième solution remarquable correspond à $m = \beta = 1$. Cette situation décrit un écoulement potentiel qui impacte une plaque plane perpendiculairement ($\theta = \pi/2$, cf. figure 15.7). Elle est appelée **solution de point d'arrêt**. Conformément à (15.4.18), l'épaisseur $\delta(x)$ de la couche limite de cet écoulement est constante. Elle vaut $\delta = \sqrt{v/c}$. On peut montrer par ailleurs que cette solution n'est plus une approximation, mais une **solution exacte** des équations de Navier-Stokes. Elle joue un rôle important pour les applications car elle permet d'initialiser un calcul de couche limite sur un objet à partir de son point d'arrêt.

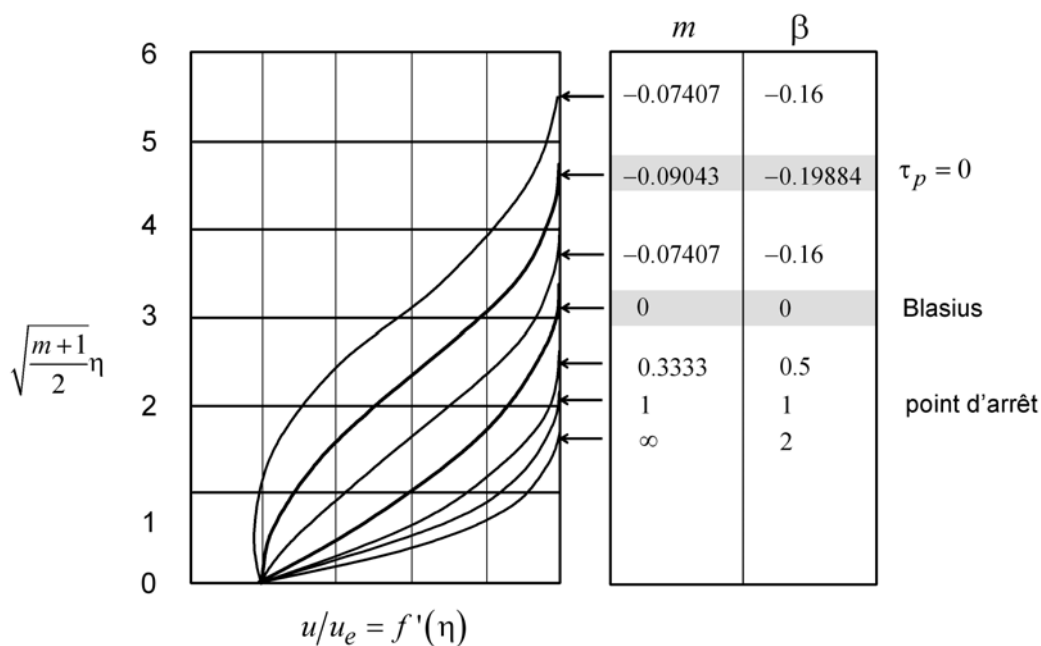


Figure 15.8 - Solution autosemblable de Falkner-Skan.

15.5 Les échelles caractéristiques de la couche limite

➤ Exemples

Dans les applications de la mécanique des fluides on est souvent amené à évaluer l'épaisseur d'une couche limite pour dimensionner tel ou tel dispositif. Le cas de la surélévation d'un tube de Pitot sur le fuselage d'un avion montré au **chapitre 11**, cf. figure **11.6**, constitue un premier exemple. Comme nous l'avons expliqué alors, le tube de Pitot mesure la pression d'arrêt de l'écoulement de fluide parfait autour de l'avion ; mais il faut pour cela que le point d'arrêt de la sonde se situe en dehors de la couche limite du fuselage de l'avion. Le choix de la hauteur du tube de Pitot par rapport à la paroi du fuselage résulte donc d'une bonne connaissance de l'épaisseur moyenne de la couche limite locale. Par ailleurs, pour obtenir une mesure du module de la vitesse, la pression d'arrêt délivrée par le tube de Pitot doit être couplée à la pression statique (ainsi qu'à une sonde de température si l'écoulement n'est plus isovolumique, c.-à-d. si le nombre de Mach n'est pas négligeable ; cf. approfondissement du paragraphe **11.5**). Sur un avion, la pression statique n'est pas mesurée au même endroit que la pression d'arrêt, mais **sur la paroi** du fuselage. Comme dans le cas de l'antenne de Prandtl, c'est la condition d'invariance de la pression à la traversée de la couche limite sur le fuselage de l'avion, prédite par la théorie ci-dessus, cf. **(15.2.24)**, qui valide ce principe.

On présente sur la figure **15.9** ci-dessous un second exemple, choisi également dans le domaine aéronautique. Il s'agit de la disposition des entrées d'air des turboréacteurs d'un avion de combat. Comme on le voit, ces entrées d'air sont décalées par rapport au fuselage. Cela permet d'éviter que la couche limite qui se développe sur ce fuselage soit ingérée par les entrées d'air. La distorsion du champ de vitesse due à la présence de fluide plus lent provenant de cette couche limite serait en effet dommageable au bon fonctionnement de la machine.



Figure 15.9- Illustration de la notion d'épaisseur de couche limite : piège à couche limite au niveau des entrées d'air d'un avion de combat (Rafale, Dassault-Aviation).

La hauteur de ce canal de captation de la couche limite, appelé « piège à couche limite », résulte aussi d'une bonne connaissance de l'épaisseur moyenne des couches limites obtenues sur toute la gamme de vitesses et d'incidences explorée par l'avion au cours de ses missions.

Remarque -

La théorie de la couche limite développée dans ce chapitre concerne les écoulements stationnaires. Elle ne s'applique que très partiellement à des situations aéronautiques telles que celle décrite sur la figure ci-dessus. Comme nous le montrerons au début du prochain chapitre, cela provient notamment du fait qu'au-delà d'une certaine valeur du nombre de Reynolds Re_x , le régime de la couche limite devient **turbulent**, donc instationnaire. Comme nous l'expliquerons alors, la turbulence augmente les échanges de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. D'où il résulte une augmentation des épaisseurs caractéristiques de la couche limite par rapport aux cas des écoulements stationnaires non turbulents, donc **laminaires**. Certaines de ces échelles sont définies ci-dessous.

➤ **L'épaisseur physique d'une couche limite**

On a pour habitude de définir tout d'abord une épaisseur dite **physique** ou **standard** d'une couche limite. Sa définition est la suivante :

L'**épaisseur physique**, ou **épaisseur standard** d'une couche limite, que l'on note $\delta_{0.99}$, est égale à la distance à la paroi pour laquelle la vitesse est égale à 99% de la vitesse de raccord :

$$(15.5.1) \quad \frac{u(x, \delta_{0.99})}{u_e(x)} = 0.99$$

Une référence théorique est donnée par la solution de Blasius relative au cas d'une plaque plane. Les valeurs numériques donnent $f'(\eta) = 0.99$ pour $\eta = 4.9$. D'où, pour cet écoulement :

$$(15.5.2) \quad \delta_{0.99}(x) = 4.9 \delta(x) \approx 4.9 \frac{x}{\text{Re}_x^{1/2}} = 4.9 \left(\frac{vx}{U_\infty} \right)^{1/2}$$

Cette échelle est identifiée sur la figure **15.4 (a)**.

On note cependant que l'épaisseur physique $\delta_{0.99}(x)$ est une échelle définie de manière ad hoc : elle ne peut pas être reliée directement aux équations de conservation de l'écoulement qu'elle représente. Pour ce faire, on introduit des **épaisseurs intégrales** qui caractérisent les **défauts de débits**, tels que les débits de **masse**, de **quantité de mouvement** ou encore d'**énergie**, relatifs au fluide contenu dans la région de la couche limite. Nous allons détailler ci-dessous la première de ces échelles. La deuxième est présentée dans un approfondissement.

➤ Épaisseur de déplacement

Une première échelle intégrale est l'**épaisseur de déplacement**. Elle caractérise le débit masse à travers une section de hauteur δ égale à l'épaisseur de la couche limite :

$$(15.5.3) \quad \dot{m}(x) = \int_0^\delta (\rho u)(x, z) dz,$$

Une bonne définition de l'épaisseur δ qui fixe la borne supérieure de cette intégrale est l'épaisseur physique $\delta_{0.99}$, cf. **(15.5.1)**. Notons par ailleurs que la définition **(15.5.3)** est générale au sens où elle s'applique de manière indifférente au cas d'un écoulement de fluide incompressible ou à celui d'un écoulement de fluide de masse volumique variable.

Ce débit est alors comparé à celui que l'on obtiendrait à travers cette même section d'écoulement si la couche limite était absente et si l'écoulement était remplacé par un **écoulement de fluide parfait** de vitesse $u_e(x)$ supposé uniforme à travers toute la hauteur de la couche limite. Le débit d'un tel écoulement vaut :

$$(15.5.4) \quad \dot{m}_e(x) = \rho_e u_e \delta$$

La présence de la couche limite implique donc une perte de débit masse valant :

$$(15.5.5) \quad \dot{m}_e - \dot{m} = \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) dz,$$

On caractérise alors ce défaut de débit masse au moyen d'une échelle de longueur δ_1 telle que :

$$(15.5.6) \quad \dot{m}_e - \dot{m} = \rho_e u_e \delta_1$$

Soit, par identification avec (15.5.5) :

$$(15.5.7) \quad \boxed{\delta_1(x) = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dz},$$

Cette échelle est appelée **épaisseur de déplacement**. Cette dénomination particulière provient du fait qu'il est possible d'écrire d'après (15.5.5) et (15.5.6) :

$$(15.5.8) \quad \rho_e u_e \delta_1 = \int_0^{\delta_1} \rho_e u_e dz = \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) dz$$

Soit :

$$(15.5.9) \quad \int_{\delta_1}^\delta \rho_e u_e dz = \int_0^\delta \rho u dz$$

À travers cette dernière relation, l'échelle δ_1 apparaît comme la distance sur laquelle il convient de déplacer la paroi solide pour obtenir un écoulement de même débit masse local dans le cadre de l'approximation du fluide parfait. Ce principe est schématisé sur la figure **15.10** ci-dessous.

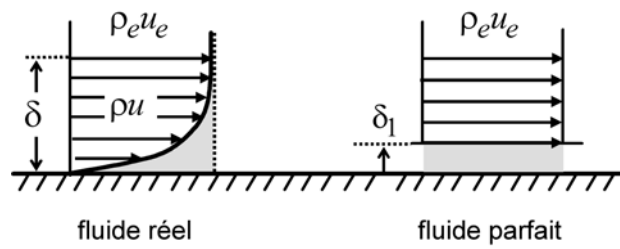


Figure 15.10 - Épaisseur de déplacement δ_1 : l'écoulement de couche limite possède le même débit de masse que l'écoulement de fluide parfait au-dessus d'une plaque plane surélevée d'une hauteur δ_1 , cf. (15.5.9).

En résumé :

L'épaisseur de déplacement δ_1 , définie par :

$$(15.5.10) \quad \delta_1(x) = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dz$$

correspond à la distance sur laquelle il faut déplacer une paroi pour qu'un écoulement réel et son approximation de fluide parfait présentent le même débit masse. Cette échelle détermine l'effet d'« épaissement » d'un objet dû à la présence de sa couche limite.

Remarque -

Dans certains ouvrages, cette échelle est notée δ^* .

Pour la **solution de Blasius**, la définition (15.5.10) avec $\rho_e = \rho = \text{const.}$ et $u_e = U_0$ mène à :

$$(15.5.11) \quad \delta_1(x) = \delta(x) \int_0^\infty (1 - f'(\eta)) d\eta = \delta(x) \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - f(\eta)],$$

Les valeurs numériques obtenues pour $f(\eta)$ donnent :

$$(15.5.12) \quad \boxed{\delta_1(x) = 1.721 \delta(x)}$$

Cette échelle est localisée sur la figure **15.4 (a)**.

➤ **Approfondissement * - L'épaisseur de quantité de mouvement et le facteur de forme**

De la même façon que pour l'épaisseur de déplacement, on considère maintenant le **débit de quantité de mouvement** dans la direction parallèle à la paroi :

$$(15.5.13) \quad J(x) = \int_0^{\delta} (\rho u^2)(x, z) dz,$$

On compare alors ce débit à celui d'un écoulement de fluide parfait de vitesse extérieure u_e qui aurait le **même débit masse** $\dot{m}(x) = \dot{m}_e$. Soit :

$$(15.5.14) \quad J_e = \dot{m}_e u_e = \int_0^{\delta} \rho u u_e dz,$$

où l'on a utilisé (15.5.3). La différence de débit de quantité de mouvement entre ces deux écoulements due à la présence de la couche limite vaut donc :

$$(15.5.15) \quad J_e - J = \int_0^{\delta} \rho u (u_e - u) dz,$$

On définit alors l'**épaisseur de quantité de mouvement** de la couche limite, que l'on note δ_2 , comme :

$$(15.5.16) \quad J_e - J = \rho_e u_e^2 \delta_2,$$

Par identification avec (15.5.15) on obtient :

$$(15.5.17) \quad \delta_2(x) = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dz$$

L'interprétation physique de cette échelle est analogue à celle de l'échelle précédente. Elle s'établit comme suit. À partir de (15.5.16) et (15.5.15), on peut écrire :

$$(15.5.18) \quad \begin{aligned} \rho_e u_e^2 \delta_2 &= \int_0^{\delta_2} \rho_e u_e^2 dz \\ &= \int_0^{\delta} \rho u (u_e - u) dz = u_e \int_0^{\delta} \rho u dz - \int_0^{\delta} \rho u^2 dz, \\ &= u_e \int_{\delta_1}^{\delta} \rho_e u_e dz - \int_0^{\delta} \rho u^2 dz = \rho_e u_e^2 (\delta - \delta_1) - \int_0^{\delta} \rho u^2 dz \end{aligned}$$

où l'on a tenu compte de (15.5.9). Soit :

$$(15.5.19) \quad \rho_e u_e^2 [\delta - (\delta_1 + \delta_2)] = \int_0^\delta \rho u^2 dz$$

Soit encore :

$$(15.5.20) \quad \int_{\delta_1 + \delta_2}^\delta \rho_e u_e^2 dz = \int_0^\delta \rho u^2 dz$$

Ainsi, la somme $\delta_1 + \delta_2$ représente la surépaisseur de l'objet « perçue » par l'écoulement extérieur de fluide parfait qui simule la perte de quantité de mouvement due à la présence de la couche limite. Ce principe est schématisé sur la figure 15.11 ci-dessous.

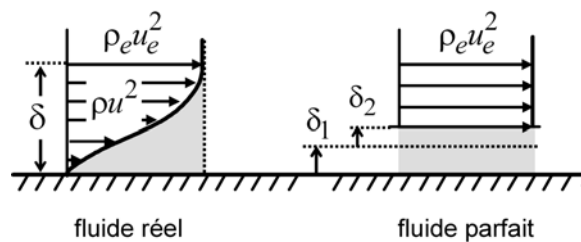


Figure 15.11 - Épaisseur de quantité de mouvement δ_2 : l'écoulement de couche limite possède le même débit de quantité de mouvement qu'un écoulement de fluide parfait au dessus d'une plaque plane surélevée d'une hauteur $\delta_1 + \delta_2$, cf. (15.5.20).

En résumé, l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 définie par (15.7.17) correspond à la distance qu'il faut rajouter à l'épaisseur de déplacement δ_1 pour compenser la perte de la quantité de mouvement due au ralentissement du fluide dans la couche limite par rapport à l'écoulement correspondant à son approximation de fluide parfait possédant le même débit de masse. La somme de l'épaisseur de déplacement et de l'épaisseur de quantité de mouvement détermine alors l'effet d'« épaissement » d'un objet sur le débit de quantité de mouvement due à la présence de la couche limite.

Remarque -

Dans certains ouvrages, l'échelle δ_2 est notée θ .

Pour la **solution de Blasius**, la définition (15.5.17) mène à :

$$(15.5.21) \quad \delta_2(x) = \delta(x) \int_0^\infty f'(\eta) [1 - f'(\eta)] d\eta$$

On trouve :

$$(15.5.22) \quad \delta_2 = 0.664 \delta(x)$$

Cette échelle est localisée sur la figure **15.4 (a)**.

Enfin, on caractérise souvent une couche limite au moyen du rapport entre les deux échelles δ_1 et δ_2 :

$$(15.5.23) \quad H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

Ce rapport est appelé **facteur de forme** de la couche limite car il permet de quantifier la forme d'un profil de vitesse dans une couche limite, forme qui traduit différents régimes possibles pour cet écoulement. La valeur de référence de ce paramètre est de nouveau fournie par la **solution de Blasius**, pour laquelle, compte tenu de (15.5.12) et (15.5.22) :

$$(15.5.25) \quad H_{Blasius} = \frac{1.721}{0.664} = 2.592$$

15.6 Sur l'importance du concept de couche limite

Comme le souligne l'extrait d'un article de revue sur l'histoire de Ludwig Prandtl repris ci-dessous, il est reconnu que le concept de la couche limite constitue un apport majeur pour la mécanique des fluides, et au-delà, pour la physique en général.

« Prandtl's boundary layer ideas revolutionized how scientists conceptualized fluid dynamics. Before Prandtl there was much confusion about the role of viscosity in a fluid flow. After Prandtl's papers, the picture was made clear; in most cases viscosity only played a role in the thin layer of flow adjacent to a surface. What a breakthrough in the understanding of a viscous flow ! » ... « I have omitted one of the enormous contributions that the boundary layer concept made to engineering and to physics. What Prandtl intuitively grasped is how to treat non uniform asymptotic expansions of differential equations that have a small parameter. Perturbative expansions are widely used in science and engineering, and are relatively straightforward if the expansion is well behaved - the technical term is "uniformly valid"... What Prandtl did in 1904 anticipated by half a century the explosive growth and application of so-called perturbation theory, which has had a profound impact in science, engineering, and mathematics » –

J.D. Anderson, “Ludwig Prandtl’s boundary layer”, Physics Today, December 2005.

15.7 Résumé des formules essentielles

➤ Notion de raccord

✓ Variables **extérieures** $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$: **fluide parfait**, cf. (15.2.3)

$$(15.7.1) \quad \underline{x} = L \bar{x}, \underline{u} = U_0 \bar{u}, p = \delta p \bar{p}$$

✓ Variables **intérieures** $(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{p})$: **couche limite**, cf. (15.2.12)

$$(15.7.2) \quad x = L \tilde{x}, z = \delta \tilde{z}, u = U_0 \tilde{u}, w = W \tilde{w}, p = \delta p \tilde{p}$$

✓ Rapports d'échelles, cf. (15.2.13), (15.2.20), (15.2.16), (15.2.21) :

$$(15.7.3) \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{L} = \text{Re}^{-1/2}$$

$$(15.2.5) \quad \frac{W}{U_0} = \bar{\delta}$$

$$(15.7.4) \quad \frac{\delta p}{\rho_0 U_0^2} = 1$$

➤ **Règle de raccord**, cf. (15.2.33), (15.2.32)

$$(15.7.3) \quad \lim_{\tilde{z} \rightarrow \infty} [\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{z}), \bar{\delta} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{z}), \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{z})] = [\bar{u}_e(\bar{x}), \bar{w}_e(\bar{x}), \bar{p}_e(\bar{x})]$$

où $[\bar{u}_e(\bar{x}), \bar{w}_e(\bar{x}), \bar{p}_e(\bar{x})]$ désigne le champ extérieur. Ce dernier correspond au champ de l'écoulement de fluide parfait sur la surface de la paroi :

$$(15.7.4) \quad [\bar{u}_e(\bar{x}), \bar{w}_e(\bar{x}), \bar{p}_e(\bar{x})] \equiv [\bar{u}(\bar{x}, 0), \bar{w}(\bar{x}, 0), \bar{p}(\bar{x}, 0)]$$

➤ Equations de la couche limite : les équations de Prandtl

✓ **Hypothèses**

Écoulement stationnaire de fluide newtonien incompressible homogène sans force de volume

✓ **Equations de Prandtl**, cf. (15.2.39), (15.2.40)

$$(15.7.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{cases}$$

$$(15.7.6) \quad \begin{cases} u = w = 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq L, z = 0 & - \text{ adhérence} \\ u = u_e(x) & \text{pour } 0 \leq x \leq L, z \rightarrow \infty & - \text{ règle de raccord} \end{cases}$$

✓ **Remarque**

La pression est invariante à travers la couche limite, cf. (15.2.24)

➤ **Solution autosimilaire de Blasius**✓ **Hypothèses**

Plaque plane dans un écoulement stationnaire uniforme de fluide newtonien incompressible homogène sans forces de volume

✓ **Variable de similitude**, cf. (15.3.16), (15.3.17), (15.3.18)

$$(15.7.7) \quad \begin{cases} \eta = \frac{z}{\delta(x)} \\ \delta(x) = \frac{x}{\text{Re}_x^{1/2}} \\ \text{Re}_x = \frac{U_0 x}{\nu} \end{cases}$$

✓ **Solution autosemblable**, cf. (15.3.15), (15.3.20)

$$(15.7.8) \quad \psi = \sqrt{\nu U_0 x} f(\eta)$$

$$(15.7.9) \quad \begin{cases} \frac{u(x, z)}{U_0} = \frac{1}{U_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} = f'(\eta) \\ \frac{w(x, z)}{U_0} = -\frac{1}{U_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Re}_x^{1/2}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \end{cases}$$

La fonction $f(\eta)$ est déterminée par les équations de Blasius, cf. (15.3.19)

$$(15.7.10) \quad \begin{cases} 2f''' + ff'' = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0 \\ f'(\infty) = 1 \end{cases}$$

➤ **Epaisseurs caractéristiques**

✓ **Epaisseur physique**, cf. (15.5.1)

$$(15.7.11) \quad \frac{u(x, \delta_{0.99})}{u_e(x)} = 0.99$$

✓ **Epaisseur de déplacement**, cf. (15.5.10)

$$(15.7.12) \quad \delta_1(x) = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dz$$

✓ **Solution de Blasius**, cf. (15.5.2), (15.5.12)

$$(15.7.13) \quad \delta_{0.99}(x) = 4.9 \delta(x)$$

$$(15.7.14) \quad \delta_1(x) = 1.721 \delta(x)$$

avec $\delta(x) = x / \text{Re}_x^{1/2}$.

ANNEXE

A15.1 Le frottement pariétal

➤ Coefficient de frottement pariétal

En un point donné de la paroi d'un objet plongé dans un écoulement caractérisé par un champ de vitesse amont uniforme \underline{U}_0 et de masse volumique ρ_0 , on définit le **coefficient de frottement pariétal**, que l'on note c_f , comme :

$$(A15.1.1) \quad c_f \equiv \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2}$$

Dans cette relation, la quantité :

$$(A15.1.2) \quad \tau_p \equiv [(\underline{\tau} \cdot \underline{n})_{paroi}] \cdot \underline{t},$$

appelée **frottement pariétal**, est la composante de la force de contact visqueuse tangente à la paroi, avec $\underline{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses, \underline{n} la normale locale à la paroi (qui rentre dans le fluide), et \underline{t} le vecteur tangent à la paroi. Dans la définition du coefficient de frottement (A15.1.1) le frottement pariétal est normalisé par la **pression dynamique** $\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2$.

En remplaçant dans l'expression (A15.1.2) le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\tau}$ par son expression newtonienne (7.2.13) :

$$(A15.1.3) \quad \underline{\tau} = \lambda \operatorname{div}(\underline{u}) \underline{1} + 2 \eta \underline{d},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} (A15.1.4) \quad \tau_p &= [(\lambda \operatorname{div}(\underline{u}) \underline{1} + 2 \eta \underline{d})_{paroi} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{t} \\ &= (\lambda \operatorname{div}(\underline{u}) \underline{n} + 2 \eta \underline{d} \cdot \underline{n})_{paroi} \cdot \underline{t} \\ &= (2 \eta \underline{d} \cdot \underline{n})_{paroi} \cdot \underline{t} \end{aligned}$$

Considérons un système de coordonnées cartésiennes où l'expression du tenseur des taux de déformation est :

$$(A15.1.5) \quad \underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\nabla \underline{u} + {}^t \nabla \underline{u} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + \boxed{\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

avec :

$$(A15.1.6) \quad \begin{cases} \underline{e}_1 = \underline{t} \\ \underline{e}_3 = \underline{n} \end{cases}$$

Après contraction de (A15.1.5) avec $\underline{n} = \underline{e}_3$, puis avec $\underline{t} = \underline{e}_1$, seul subsiste la composante du tenseur encadrée. Soit :

$$(A15.1.7) \quad \tau_p(x) = \left(2 \eta \underline{\underline{d}} \cdot \underline{e}_3 \right)_{paroi} \cdot \underline{e}_1 = \eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) (x, 0)$$

Par ailleurs, d'après la condition d'adhérence, on a :

$$(A15.1.8) \quad w(x, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(x, 0) = 0$$

Donc il reste :

$$(A15.1.9) \quad \boxed{\tau_p(x) = \eta \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0)}$$

On peut montrer que cette expression est valable pour **tout écoulement autour d'un obstacle bidimensionnel quelconque** si z désigne la coordonnée selon la normale locale à la paroi.

➤ Coefficient de traînée

Pour une plaque de longueur L , on définit alors aussi le **coefficient de traînée** de la plaque comme :

$$(A15.1.10) \quad c_D = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 L}$$

où \mathcal{D} désigne la force de traînée :

$$(A15.1.11) \quad \mathcal{D} = \int_0^L \tau_p(x) dx = \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 \int_0^L c_f(x) dx$$

Remarque -

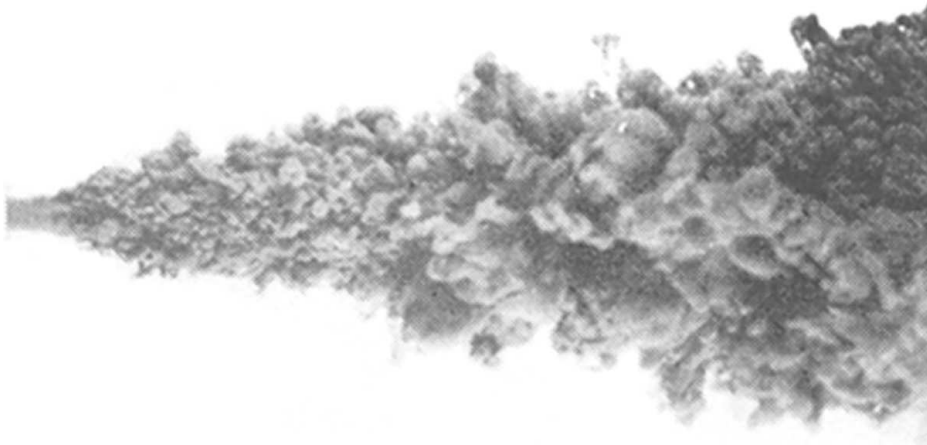
Si l'on se réfère à la décomposition de la traînée introduite au paragraphe 6 du **chapitre 13**, cf. (13.6.14), il s'agit d'une traînée purement visqueuse, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^v$.

D'où :

$$(A15.1.12) \quad \boxed{c_D = \frac{1}{L} \int_0^L c_f(x) dx}$$

Chapitre 16

La turbulence



CHAPITRE 16.	LA TURBULENCE	587
16.1	L'exemple de la couche limite	587
	Observations	587
	La turbulence : un mécanisme de mélange macroscopique.....	588
	La turbulence : un phénomène associé aux grands nombres de Reynolds	590
	La turbulence : un mécanisme dissipatif.....	590
	La turbulence : un phénomène qui échappe encore à toute description théorique.....	591
	La turbulence : un phénomène limite pour la mesure et pour la simulation numérique	591
16.2	Le « paradoxe de la turbulence »	592
	Un problème générique.....	592
	Le taux de dissipation moyen par unité de masse	592
	Traînée et dissipation.....	594
	Le « paradoxe de la turbulence ».....	596
	Approfondissement ** - Crise de trainée et effets de rugosités : le cas des balles de jeu.....	598
16.3	La cascade d'énergie	602
	Observations	602
	Le modèle de la cascade d'énergie de Richardson-Kolmogorov	603
	Le modèle de la cascade d'énergie dans l'espace physique	605
	Approfondissement * – La turbulence : un processus fractal ?.....	606
	Le régime inertiel	606
	Le régime visqueux	607
	Le « coût » de la turbulence	608
16.4	Outils statistiques	610
	Moyennes	610
	Corrélations.....	611
	Stationnarité statistique	612
	Homogénéité statistique.....	613
	Isotropie.....	614
16.5	Les équations de Reynolds	614
16.6	Application : l'écoulement turbulent dans un canal	618
	Hypothèses	618
	Equations	619
	Solution laminaire (écoulement de Poiseuille plan)	622
	Cas turbulent.....	623
	Solution : aspects qualitatifs	624
	Conclusion.....	626
16.7	Résumé des formules essentielles	627

16. La turbulence

16.1 L'exemple de la couche limite

➤ Observations

L'approximation de couche limite dont nous venons d'étudier les principes au chapitre précédent permet de bien introduire la problématique de la turbulence dans les fluides. La figure 16.1 ci-dessous montre ce que l'on observe si l'on injecte du colorant au niveau du bord d'attaque d'un profil d'aile. Trois nombres de Reynolds basés sur la corde du profil sont considérés : pour $Re = 30\,000$ l'écoulement est stationnaire dans toute la couche limite. Pour un nombre de Reynolds dix fois plus important, soit $Re = 300\,000$, l'écoulement est instationnaire dans la majeure partie de la couche limite. Pour un nombre de Reynolds intermédiaire entre ces deux valeurs, l'écoulement devient instationnaire au milieu du profil. Cette figure décrit le même phénomène que celui observé par O. Reynolds dans son expérience historique commentée au **chapitre 9**, cf. figure 9.4, à savoir qu'il existe un nombre de Reynolds critique, ici un nombre de Reynolds Re_x basé sur la distance x par rapport à l'origine de la couche limite, cf. (15.3.18), au-delà duquel l'écoulement devient instationnaire.

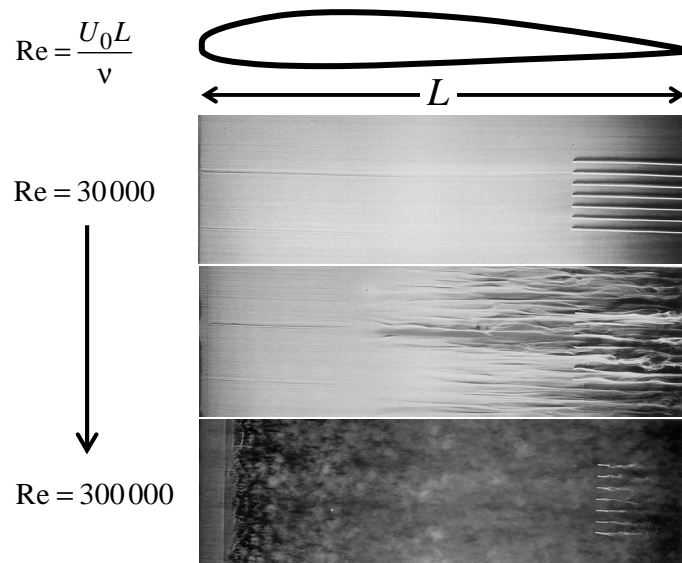


Figure 16.1 – Visualisation par colorant de la couche limite sur un profil d'aile pour différents nombres de Reynolds : régime laminaire ($Re = 30\,000$) et régime pleinement turbulent ($Re = 300\,000$).

Le cas stationnaire $Re = 30\,000$ est bien représenté par les équations de Prandtl étudiées au chapitre précédent. Mais les idées de Prandtl ne sont pas fondamentalement remises en question par l'apparition de la turbulence : l'expérience montre en effet que l'action de la viscosité, à laquelle s'ajoute maintenant celle de la turbulence, reste bien confinée dans une fine couche en contact de l'objet.

➤ La turbulence : un mécanisme de mélange macroscopique

La figure 16.2. ci-dessous schématise la modification du comportement de l'écoulement de couche limite vu à travers celui de deux lignes de courant. On identifie une région intermédiaire entre l'écoulement **stationnaire** amont, qualifié de **laminaire**, et l'écoulement plus loin en aval qui est **instationnaire** et **turbulent**. Dans cette région intermédiaire, appelée **région de transition**, l'écoulement devient instationnaire mais il ne vérifie pas encore les propriétés d'un écoulement turbulent au sens où nous allons les définir dans ce chapitre.

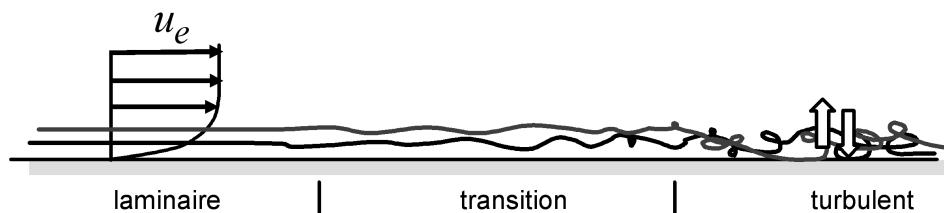


Figure 16.2 - Schéma de transition entre régime laminaire et régime turbulent dans une couche limite.

Pour caractériser expérimentalement les états instationnaires décrits ci-dessus, on a besoin de lisser les données au moyen de moyennes temporelles. Par exemple, pour la vitesse on considère la moyenne :

$$(16.1.1) \quad \overline{u}^{-T}(x, z, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(x, z, t') dt'$$

L'expérience montre alors que si les conditions aux limites de l'écoulement sont stationnaires, cette moyenne devient indépendante de l'instant t où on la réalise :

$$(16.1.2) \quad \overline{u}^{-T}(x, z, t) = \overline{u}^{-T}(x, z)$$

Un écoulement qui vérifie cette propriété est dit **statistiquement stationnaire**. Nous reviendrons sur cette notion plus loin.

Remarque -

La présence du « T » dans la notation de la moyenne temporelle « $\overline{\cdot}^{-T}$ » permet de distinguer cette quantité de la variable sans dimension extérieure « $\overline{\cdot}$ » utilisée dans l'analyse dimensionnelle.

La figure 16.3 ci-dessous compare l'allure typique du profil de la moyenne temporelle \overline{u}^{-T} de la composante longitudinale de la vitesse u mesurée dans une couche limite stationnaire ou turbulente (dans le cas stationnaire, $\overline{u}^{-T} = u$). On constate tout d'abord que la turbulence augmente le frottement moyen de la couche limite $\overline{\tau}_p^{-T} = \eta \partial \overline{u}^{-T} / \partial z(x, z=0)$ caractérisé par la pente de la vitesse (ici la vitesse moyenne \overline{u}^{-T}) à l'origine, cf. (15.4.4). On constate aussi que dans la partie supérieure de la couche limite turbulente, la vitesse \overline{u}^{-T} converge moins vite vers la valeur extérieure u_e . Comme nous l'avons signalé dans une remarque sous la figure 15.9, cela implique que la turbulence augmente les épaisseurs caractéristiques de la couche limite. Ces effets sont le résultat d'un **transport vertical** de la quantité de mouvement engendré par la turbulence. Nous avons schématisé ce mécanisme au moyen de deux flèches blanches sur la droite de la figure précédente. Explicitons cela.

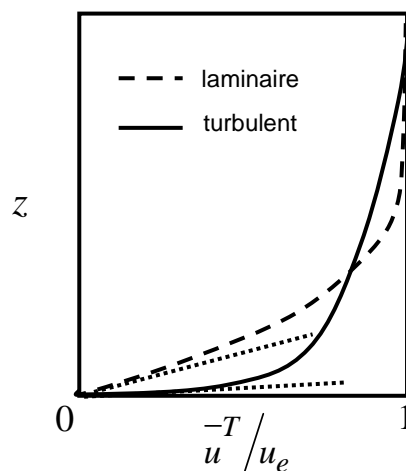


Figure 16.3 - Allure du profil de la vitesse longitudinale dans une couche limite en régime laminaire et en régime turbulent.

Comme nous l'avons vu à propos du premier problème de Stokes au **chapitre 10** et lors de l'examen de la théorie de la couche limite au chapitre précédent, dans un écoulement visqueux la variation verticale de la quantité de mouvement s'effectue uniquement par le biais de la viscosité, donc via un **processus microscopique de diffusion**. Pour le cas d'un gaz, ce processus a été illustré au paragraphe 2.3 du **chapitre 2** au moyen de l'« analogie des barques ».

En régime turbulent, cette variation s'effectue dorénavant aussi, et surtout, par le biais d'un mécanisme de **transport** non plus microscopique, mais **macroscopique**. Ce nouveau processus prend le pas sur tous les processus diffusifs microscopiques des écoulements. **C'est l'une des propriétés majeures de la turbulence.**

➤ **La turbulence : un phénomène associé aux grands nombres de Reynolds**

Comme vu sur la figure 16.1, l'apparition du phénomène de la turbulence est associée aux grands nombres de Reynolds. On peut alors avancer l'idée que la turbulence caractérise un état d'agitation et de désordre consécutif à un défaut d'équilibre entre le frottement visqueux et l'inertie du fluide. Dans le cas d'une couche limite, tout se passe comme si, au fur et à mesure que l'inertie du fluide augmente, la viscosité du fluide ne parvenait plus à assurer à elle seule l'équilibre inertie-frottement nécessaire à l'existence du schéma de Prandtl de deux régions raccordées en régime stationnaire vu au chapitre précédent. On observe alors que l'écoulement développe spontanément un nouveau mécanisme de transport de la matière, de nature macroscopique, apte à rétablir l'équilibre requis.

➤ **La turbulence : un mécanisme dissipatif**

Dans un fluide newtonien, au frottement est associée la **fonction de dissipation** dont l'expression pour un fluide newtonien est, cf. (7.4.6) :

$$(16.1.3) \quad \epsilon = \underline{\underline{\tau}} : \nabla \underline{u} = \lambda (\operatorname{div} \underline{u})^2 + 2\eta \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} \geq 0$$

Comme nous l'avons montré au **chapitre 5** lors de l'établissement des équations de bilan de l'énergie et de l'entropie, cf. (5.4.6), (5.4.7), cette fonction traduit la puissance des efforts intérieurs qui transforment de manière irréversible la forme cinétique de l'énergie (l'énergie

cinétique $e_c = \frac{1}{2} \underline{u}^2$) en sa forme calorifique (l'énergie interne e). Puisque la turbulence augmente le frottement elle amplifie donc aussi la dissipation.

Notre insistance lors de l'exposé du **chapitre 5** sur l'importance de la fonction de dissipation ϵ trouve alors dans ce dernier chapitre sa pleine justification : en effet, cette fonction constitue la clef de la seule interprétation phénoménologique du mécanisme de la turbulence dont nous disposons aujourd'hui, à savoir le **modèle de la cascade d'énergie de Richardson-Kolmogorov** que nous allons détailler dans ce chapitre. Énonçons alors d'emblée l'un des points essentiels qui concerne tout ce qui a trait au phénomène de la turbulence dans les fluides :

La quantité clef qui permet d'appréhender la turbulence dans les fluides est la fonction de dissipation ϵ .

➤ **La turbulence : un phénomène qui échappe encore à toute description théorique**

Comme nous allons le voir, le **modèle de la cascade d'énergie de Richardson-Kolmogorov** évoqué ci-dessus constitue un outil interprétatif original et puissant. Il est à la base de toutes les modélisations des effets liés à la turbulence en mécanique des fluides. Mais il s'agit d'une « théorie phénoménologique » ; ce n'est pas une théorie mathématique issue des équations de Navier-Stokes. Nous ne disposons pas aujourd'hui d'une théorie mathématique de la turbulence. Il s'agit là du principal verrou qu'il faut ouvrir pour percer le mystère des équations de Navier-Stokes, comme évoqué au paragraphe 7.7 du **chapitre 7** consacré à ces équations.

➤ **La turbulence : un phénomène limite pour la mesure et pour la simulation numérique**

La turbulence dans les fluides constitue l'un des principaux facteurs limitant pour la mesure et pour la simulation numérique des écoulements. Sa caractérisation précise est en effet très exigeante en matière de moyens de mesure et en moyens informatiques. Nous allons expliquer dans ce chapitre pourquoi il en est ainsi.

16.2 Le « paradoxe de la turbulence »

L'examen détaillé de quelques expériences où se manifeste la turbulence, comme par exemple l'écoulement autour d'un cylindre de la figure 8.5 (b), l'écoulement de Poiseuille de la figure 9.4 (pour $Re > Re_c$) ou encore la couche limite décrite sur la figure 16.1 ci-dessus, aboutit à un « paradoxe » qui est fondateur pour l'interprétation de ce mécanisme. Nous allons expliquer ce « paradoxe » dans ce paragraphe.

➤ Un problème générique

Dans la suite, on considérera que le fluide est **newtonien** et qu'il peut être représenté par le modèle du **fluide incompressible homogène et non pesant**. L'écoulement sera aussi considéré comme **instationnaire** puisque la turbulence est précisément un phénomène qui résulte de la brisure des états stationnaires obtenus aux plus petits nombres de Reynolds. Un bon exemple sur lequel on peut raisonner pour présenter le caractère paradoxal de la turbulence évoqué ci-dessus n'est pas celui de la couche limite, mais celui d'un obstacle dans un écoulement. Nous allons donc nous concentrer de nouveau sur ce problème, en considérant le cas d'une sphère, comme représenté de nouveau sur la figure 16.4 ci-dessous.

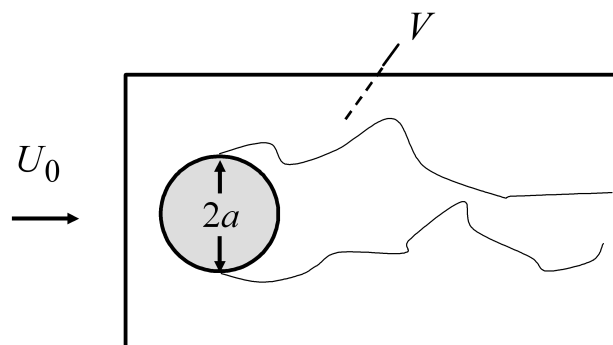


Figure 16.4 - Définitions pour un bilan de dissipation dans un volume géométrique fixe V : cas d'une sphère dans un écoulement de vitesse amont uniforme.

Notre objectif est d'évaluer la **puissance moyenne dissipée par la turbulence** dans cet écoulement.

➤ Le taux de dissipation moyen par unité de masse

Nous considérons que cet écoulement est turbulent et nous voulons évaluer la quantité **stationnaire** :

$$(16.2.1) \quad \varepsilon_V \equiv \overline{\left\langle \frac{1}{\rho} \epsilon(\underline{x}, t) \right\rangle_V^T} = \frac{1}{V} \iiint_V \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{\rho} \epsilon(\underline{x}, t) dt \right] dV$$

Cette quantité définit un **taux de dissipation moyen par unité de masse dans un volume de contrôle V donné**. C'est cette puissance moyenne dissipée par la turbulence dans le volume V que nous cherchons à évaluer. Conformément à cette définition, cette quantité est obtenue en appliquant deux types de moyenne à la fonction de dissipation $\epsilon(\underline{x}, t)$:

✓ la moyenne temporelle (16.1.1) :

$$(16.2.2) \quad \overline{(\cdot)}^T(\underline{x}) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\cdot)(\underline{x}, t') dt',$$

où l'on a fait l'hypothèse que l'écoulement turbulent est statistiquement stationnaire, c.-à-d. que cette moyenne est indépendante du temps t (c'est l'hypothèse évoquée plus haut pour la vitesse dans une couche limite, cf. (16.1.2)) ;

✓ une moyenne spatiale dans le volume géométrique V occupé par le fluide analysé

$$(16.2.3) \quad \langle (\cdot) \rangle_V \equiv \frac{1}{V} \iiint_V (\cdot)(\underline{x}, t) dV$$

La quantité ε_V (16.2.1) dépend donc a priori du volume géométrique d'intégration V que l'on choisit.

Remarque -

Notons que ces deux opérateurs permutent : $\langle \overline{(\cdot)}^T \rangle_V = \overline{\langle (\cdot) \rangle_V^T}$. On peut donc les appliquer dans un ordre indifférent.

Que nous disent alors les expériences à propos de cette quantité ? Et bien ... rien ! La raison est simple : la fonction de dissipation est une quantité très difficile à mesurer. Dans le cas d'un écoulement de fluide newtonien incompressible il s'agit en effet de déterminer $\epsilon = 2\eta \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}$ en tout point d'un volume et à tout instant. Puisque $\underline{\underline{d}} = (\nabla \underline{u} + {}^t \nabla \underline{u})/2$, il faut

donc mesurer avec précision neuf gradients $\partial u_i / \partial x_j, i, j = 1, 2, 3$, à chaque instant et dans tout un volume. A ce jour, cet «exploit » n'a pas été encore réalisé.

➤ Traînée et dissipation

Pour déterminer le taux de dissipation moyen par unité de masse ε_V **(16.2.1)** on peut cependant s'appuyer sur le raisonnement suivant : la dissipation de l'énergie cinétique dans le volume de contrôle V entourant la sphère est une puissance dont l'origine ne peut être que le travail des forces de contact entre le solide et le fluide, c'est-à-dire le travail de la force de traînée. On peut donc ainsi relier ε_V à la force de traînée de la sphère. On considère pour cela la **moyenne temporelle** $\overline{\mathcal{D}}^T$ de la force de traînée de la sphère :

$$(16.2.4) \quad \overline{\mathcal{D}}^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T \mathcal{D}(t) dt$$

En appliquant la démarche de l'analyse dimensionnelle enseignée au **chapitre 10**, partant de la relation, cf. **(10.2.1)** :

$$(16.2.5) \quad \mathcal{F}(\overline{\mathcal{D}}^T, U_0, a, \rho, \eta) = 0,$$

on obtient, cf. **(10.2.9)** :

$$(16.2.6) \quad \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\overline{\mathcal{D}}^T}{\rho U_0^2 a^2}, \frac{\eta}{\rho a U_0}\right) = 0$$

On peut aussi finalement écrire, cf. **(10.2.10)** :

$$(16.2.7) \quad \overline{\mathcal{G}}\left(\overline{\mathcal{C}}_D^T = \frac{\overline{\mathcal{D}}^T}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 (\pi a^2)}, \text{Re} = \frac{\rho U_0 (2a)}{\eta}\right) = 0$$

Soit :

$$(16.2.8) \quad \overline{C_D}^T = \overline{C_D}^T (\text{Re})$$

où $\overline{C_D}^T (\text{Re})$ est le coefficient de traînée. Soit :

$$(16.2.9) \quad \overline{D}^T = \frac{1}{2} \rho U_0^2 (\pi a^2) \times \overline{C_D}^T (\text{Re})$$

La **puissance moyenne** développée par cette force, que nous noterons $\overline{\mathcal{P}}^T$, est celle qui permet à la sphère d'avancer à la vitesse U_0 dans un fluide au repos, ou de façon équivalente celle qui permet à la sphère de se maintenir autour d'une position stationnaire moyenne dans un fluide de vitesse uniforme U_0 . Elle vaut :

$$(16.2.10) \quad \boxed{\overline{\mathcal{P}}^T = \overline{D}^T U_0}$$

Cette puissance est égale à la puissance moyenne dissipée dans le fluide entourant la sphère. Soit :

$$(16.2.11) \quad \overline{\mathcal{P}}^T = \overline{D}^T U_0 = \lim_{V \rightarrow \infty} [\rho V \varepsilon_V]$$

où l'on considère à travers la limite $V \rightarrow \infty$ un volume V suffisamment vaste pour englober l'ensemble de la dissipation réalisée dans l'écoulement. Donc :

$$(16.2.12) \quad \lim_{V \rightarrow \infty} [\rho V \varepsilon_V] = \overline{D}^T U_0$$

En fonction du coefficient de traînée $\overline{C_D}^T (\text{Re})$ cela donne finalement :

$$(16.2.13) \quad \boxed{\lim_{V \rightarrow \infty} [\rho V \varepsilon_V] = \overline{C_D}^T (\text{Re}) \times \rho U_0^3 a^2}$$

Dans le second membre de cette relation, la viscosité η qui est responsable de la dissipation intervient dans la dépendance du coefficient de traînée vis-à-vis du nombre de Reynolds $Re = \rho U_0 a / \eta$.

La relation (16.2.13) constitue la clef de ce chapitre. Elle révèle, comme nous allons le démontrer maintenant, le « **paradoxe** » de la turbulence que nous avons annoncé.

➤ Le « paradoxe de la turbulence »

C'est l'expérience qui révèle ce paradoxe. Considérons en effet le coefficient de traînée aérodynamique C_D présenté sur la figure 9.6 du chapitre 9. Nous reproduisons ci-dessous de nouveau le comportement de cette quantité en fonction du nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la sphère. On aura compris qu'il convient de considérer que C_D représente la moyenne temporelle $\overline{C_D}^T$ qui efface toutes les fluctuations instantanées de C_D .

Remarque -

En pratique, le coefficient $C_D = \overline{C_D}^T$ est obtenu à l'aide de capteurs dynamométriques. Pour obtenir une moyenne temporelle on utilise alors des capteurs possédant une grande constante de temps ; si le capteur est trop sensible, on utilise un intégrateur analogique ou bien on effectue une moyenne temporelle a posteriori, par voie informatique.

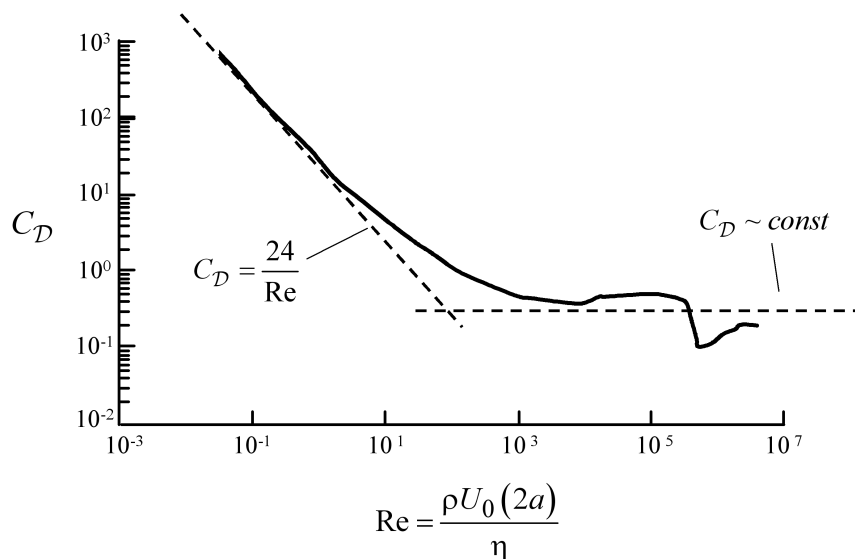


Figure 16.5 - Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds (compilation ; cf. figure 9.6).

On observe sur la figure **16.5** qu'après une décroissance initiale en Re^{-1} justifiée au **chapitre 10** (c'est le régime sans inertie), le coefficient de traînée de la sphère « sature » pour devenir **approximativement constant**. Soit :

$$(16.2.14) \quad \lim_{Re \rightarrow \infty} \overline{C_D}^T \approx const.$$

Ce comportement accompagne le développement de la turbulence dans l'écoulement. Compte tenu de (16.2.13), cela se traduit par la relation générale :

$$(16.2.15) \quad \boxed{\lim_{Re \gg 1} \lim_{V \rightarrow \infty} [\rho V \epsilon_V] \approx const. \times \rho U_0^3 a^2}$$

C'est ce résultat qui est **paradoxal** car il aboutit à la conclusion suivante :

Le « paradoxe » de la turbulence -

Aux grands nombres de Reynolds, la puissance totale absorbée dans l'écoulement par le frottement visqueux devient indépendante de la viscosité (!)

Ainsi, conformément à (16.2.15), en régime turbulent, le taux de dissipation moyen résultant de l'interaction entre l'écoulement et l'objet ne dépend plus que des **échelles externes** U_0 et a . Du fait de l'indépendance de $\overline{C_D}^T$ vis-à-vis du nombre de Reynolds, **la valeur de la viscosité cinématique ν du fluide n'intervient plus**. La puissance totale développée dans le volume de contrôle V par la dissipation visqueuse devient alors une fraction constante de la puissance $\rho U_0^3 a^2$ mise en jeu dans le problème, et cela quelle que soit la valeur de ν .

Cette **libération du milieu vis-à-vis de la viscosité cinématique** caractérise les régimes turbulents.

➤ Remarques

Voici trois remarques à propos de l'écoulement autour de la sphère avec lequel nous avons introduit ce concept fondamental qu'est le « paradoxe » de la turbulence.

✓ A travers les relations (16.2.13) et (16.2.14), la puissance dissipée par le frottement visqueux aux grands nombres de Reynolds devient indépendante du fluide dans la mesure où l'on caractérise ce dernier par la valeur de sa viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ qui intervient dans le nombre de Reynolds. Mais pour un nombre de Reynolds et une viscosité dynamique η donnés, cette puissance dépend tout de même de la densité du fluide (à travers le groupement dimensionnel $\rho U_0^3 a^2$). Ainsi, une sphère de rayon a avançant dans un fluide avec une vitesse U_0 dissipe environ 1000 fois plus d'énergie dans l'eau que dans l'air conformément au rapport des masses volumiques de ces deux fluides.

✓ Il existe peu de résultats sur le coefficient de traînée d'une sphère à des nombres de Reynolds « extrêmes », c.-à-d. supérieurs à ceux répertoriés sur la figure 16.5. Si l'on poussait la description expérimentale au-delà de ces valeurs, on observerait alors que le coefficient de traînée ne reste pas exactement constant : il continue à décroître très légèrement du fait de l'existence d'une région non turbulente, située très près de la paroi. L'existence de cette région résulte de la condition d'adhérence qui fait qu'une paroi solide inhibe tout mouvement, notamment les échanges verticaux représentés par des flèches blanches sur la figure 16.2. Dans cette région (qui est d'autant plus fine que le nombre de Reynolds est grand), l'écoulement reste obligatoirement laminaire.

✓ La figure 16.5 révèle qu'aux grands nombres de Reynolds le coefficient de traînée C_D ne devient qu'approximativement constant. Comme déjà souligné par deux fois déjà dans le cours (au chapitre 9 et au chapitre 13), on observe notamment une décroissance brutale de la traînée aux environs du nombre de Reynolds $Re = 4 \cdot 10^5$. Ce phénomène porte le nom de **crise de traînée** et il n'est pas anodin : il traduit l'envahissement de l'écoulement par la turbulence jusque dans les fines couches limites de l'objet, et pas seulement dans son sillage. On voit alors que la traînée diminue (presque d'un facteur 5) sur une plage étroite de nombres de Reynolds. Comment l'apparition de la turbulence dans la couche limite de l'objet engendre-t-elle cette réduction de la traînée ? Nous expliquons cela dans l'approfondissement ci-dessous.

➤ **Approfondissement ** - Crise de traînée et effets de rugosités : le cas des balles de jeu**

✓ **La crise de traînée**

Comme nous l'avons souligné à propos de la figure 16.3, quand une couche limite devient turbulente, on assiste à une augmentation du frottement pariétal, donc à une augmentation de la vitesse du fluide

dans la région proche de la paroi. Cela favorise une meilleure aptitude de la couche limite à résister au phénomène de décollement décrit sur la figure 15.6 du chapitre précédent. A titre d'exemple, la figure 16.6 ci-dessous compare l'écoulement autour d'une sphère lisse pour un nombre de Reynolds d'environ 10^5 à celui obtenu pour le même nombre de Reynolds lorsque **des perturbations sont déclenchées dans la couche limite** au moyen d'un petit obstacle (ici un fil de nylon collé autour de la sphère ; voir flèches noires). On constate que dans le second cas, l'écoulement décolle plus loin sur la partie arrière de la sphère (voir flèches blanches).

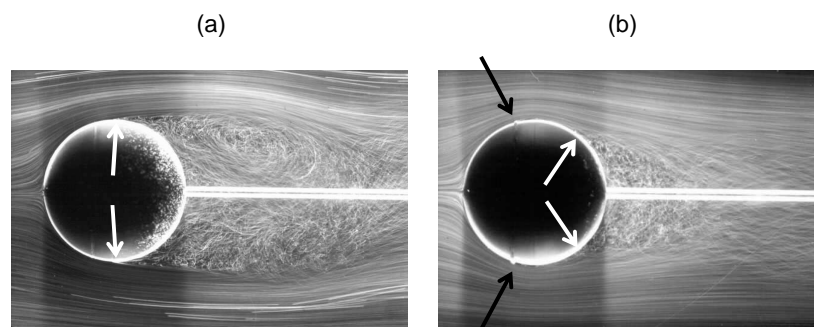


Figure 16.6 - Effet d'une rugosité (flèches noires) sur le décollement de la couche limite d'un écoulement autour d'une sphère (flèches blanches).

Or, aux grands nombres de Reynolds, la traînée d'un objet simple tel qu'un cylindre ou une sphère est essentiellement due à la dissymétrie du coefficient de pression entre la partie amont et la partie aval de l'objet. Nous avons explicité cela au moyen de la figure 13.6 qui nous avait permis d'invalider l'approche potentielle pour de tels régimes. En comparant les 16.6 (a) et (b) on voit alors qu'en présence de la rugosité l'écoulement reste plus longtemps en contact avec la sphère sur sa partie arrière. L'écoulement se recomprime donc légèrement dans cette région. Même si cette recompression n'est pas complète au point d'annuler la traînée comme dans le cas de la solution potentielle, le différentiel de pression amont-aval sur l'objet est moindre et la force de traînée obtenue est donc inférieure à celle obtenue dans le cas de la figure 16.6 (a). Cela suggère que c'est l'apparition de la turbulence dans la couche limite de l'objet qui est responsable de la réduction du coefficient de traînée associée à la crise de traînée.

✓ Effet de rugosités sur la traînée : l'exemple des balles de jeu

Dans de nombreuses applications aéro- ou hydrodynamiques on introduit volontairement des rugosités sur la surface des objets. Citons le cas des balles de jeu : ballons de football, balles de tennis, balles de golf. On rend volontairement la surface de ces balles rugueuse à l'aide de coutures, d'une texture feutrée ou au moyen d'alvéoles. Comme expliqué ci-dessus, le développement de la turbulence dans la couche limite d'une sphère retarde son décollement car la meilleure adhérence de l'écoulement qui en résulte réduit le différentiel de pression amont-aval qui constitue la source principale de la traînée d'une sphère pour les grands nombres de Reynolds (traînée de pression).

L'introduction de rugosités perturbe l'écoulement de couche limite et « force » alors celle-ci à devenir turbulente pour des nombres de Reynolds inférieurs à ceux correspondant à la crise de traînée d'une sphère lisse. Cela est prouvé par la figure ci-dessous consacrée au cas de la balle de golf : la présence d'alvéoles sur la surface de ce type de balles fait que la crise de traînée consécutive à l'apparition de la turbulence dans la couche limite a lieu pour des nombres de Reynolds environ 10 fois plus petits que dans le cas lisse.

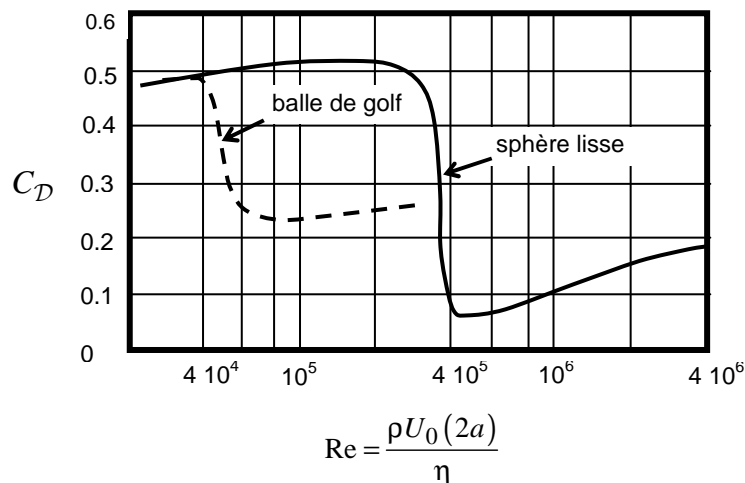


Figure 16.7 - La crise de traînée : comparaison entre une sphère lisse et une balle de golf (effet de rugosités). (Source : Munson, Young & Okiishi, Fundamentals of Fluid Mechanics, John Wiley, 4th Edition, 2002).

Quantifions mieux cela. Le diamètre d'une balle de golf est légèrement supérieur à 4cm. Une valeur typique de vitesse initiale est (d'après les sites de golf) : $U_0 = 70m.s^{-1}$. Pour $\nu \approx 1.510^{-5}m^2.s^{-1}$ (air), cela donne : $Re \approx 1.910^5$. On voit sur la figure ci-dessus que pour ce nombre de Reynolds, la texture de la surface de la balle permet de réduire la traînée d'un facteur environ égal à 2 ($C_D \approx 0.25$ pour la balle de golf ; $C_D \approx 0.5$ pour le cas lisse). Puisque, la traînée réduit la vitesse de la balle, la présence des rugosités permet donc d'accroître la portée de sa trajectoire. C'est cela que favorise le déclenchement par des rugosités de la turbulence dans la couche limite.

✓ Effet de rugosités sur la portance : l'exemple des balles de jeu

En examinant la figure 16.7 ci-dessus, on observe que la réduction du coefficient de traînée obtenue sur une balle lisse lors de la crise de traînée est plus importante que dans le cas rugueux. Moyennant une vitesse initiale plus importante, on pourrait donc mieux bénéficier de cet effet avec une balle lisse. L'avantage des balles rugueuses n'est donc pas si évident lorsqu'on se limite à des considérations sur la traînée.

Il convient de mentionner en effet un autre avantage lié à l'effet d'une surface rugueuse, qui est l'accroissement de la portance par effet Magnus. Ce régime d'écoulement a été illustré sur la figure 13.9 du chapitre 13.

Considérons de nouveau l'exemple d'une balle de golf et ajoutons dans le bilan dynamique de la balle une force de portance verticale par effet Magnus. Comme vu au **chapitre 13**, une telle force est obtenue si l'on dote la balle d'un mouvement initial de rotation. Selon le sens de la rotation, la projection verticale de la portance va se soustraire ou s'ajouter au poids. La situation est schématisée sur la figure **16.8** ci-dessous pour une rotation positive. Dans ce cas la portance s'oppose au poids.

Remarque - En effet, la portance due à l'effet Magnus vaut d'après le théorème de Kutta-Jukowski : $\mathcal{L} \sim -\rho \Gamma U_0$, cf. (13.7.2). Dans cette relation U_0 désigne la vitesse du fluide impactant l'objet, et Γ est la circulation du fluide provoqué par la rotation de l'objet. Dans le cas de la figure **16.8**, on a $U_0 = -q$ et $\Gamma > 0$, d'où le résultat.

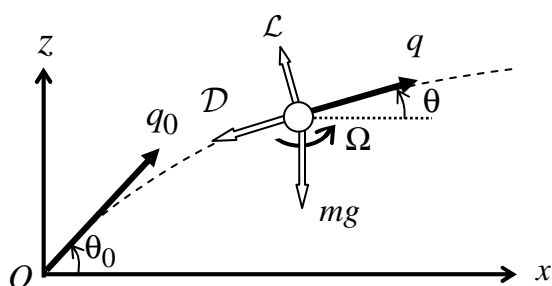


Figure 16.8 - Trajectoire bidimensionnelle et bilan de forces pour une balle de jeu en rotation.

Si cette force de portance n'est pas « excessive », l'effet de sustentation rallonge la portée de la trajectoire.

Remarque -

On entend par portance excessive une portance qui est grande devant le poids. Dans ce cas la balle prend trop d'altitude et sa portée est réduite. Elle peut même, cas extrême, effectuer une boucle et retomber derrière son point de départ.

La turbulence déclenchée dans la couche limite par les rugosités de la balle favorise alors ce gain. En effet en retardant le décollement elle augmente la région de contact de l'écoulement sur la partie supérieure de la sphère tournante en rapprochant les points d'arrêt A_1 et A_2 visualisés sur la figure **13.9** du **chapitre 13**. D'où une augmentation de la circulation Γ du fluide au contact de la balle. Il en résulte une augmentation de la portance par effet Magnus.

Remarques -

- Pour un cylindre de rayon a , la relation entre la circulation Γ et le taux de rotation Ω est $\Gamma = 2\pi a^2 \Omega$.

- La formule de Kutta-Jukowski que nous venons de rappeler s'applique aux objets bidimensionnel. Il s'agit donc d'une force par unité de longueur, en $N.m^{-1}$. Pour une sphère, si l'on adopte ce point de vue, on peut approximer la force de portance complète d'une sphère (en Newtons) en considérant une intégrale de la circulation selon l'axe de rotation de la sphère.

L'effet de la turbulence consécutif à la présence de rugosités est donc doublement bénéfique : il réduit la traînée et il augmente la portance. Au bilan, on obtient une meilleure portée de la balle. Il convient de mentionner enfin le fait qu'en forçant la turbulence par des rugosités, on réduit les efforts parasites instationnaires qui peuvent résulter du déclenchement irrégulier de la turbulence sur la surface de la balle : cela stabilise sa trajectoire.

C'est pour toutes ces raisons que l'on utilise des balles de jeu rugueuses auxquelles on imprime (souvent) un effet de rotation. Si l'on inverse le sens de la rotation, on obtient une « déportance ». Cela réduit la longueur de la trajectoire (la trajectoire est plus « tendue »). On parle de « balle coupée » pour $\Gamma > 0$, et de « balle liftée » pour $\Gamma < 0$.

16.3 La cascade d'énergie

Nous allons maintenant observer plus attentivement quelques images pour découvrir ce qui se cache derrière les résultats précédents. Cela va nous permettre d'introduire le **modèle de la cascade d'énergie de Richardson-Kolmogorov** évoqué plus haut, qui est apte à lever le « paradoxe de la turbulence » énoncé plus haut. Ce modèle s'appuie sur un ensemble de raisonnements d'une grande portée.

➤ Observations

La figure **16.9** ci-dessous montre des visualisations par colorant de l'écoulement autour de la sphère pour trois nombres de Reynolds. Le premier, $Re = 20000$, est le double de la valeur de la figure **8.5 (b)** présentée au **chapitre 8**. La technique de visualisation utilisée ici est différente ; c'est la même que celle de la figure **8.5 (a)** (colorant émis à partir du point d'arrêt frontal de la sphère).

Comme déjà observé sur la figure **8.5 (b)**, on voit alors sur la figure **16.9** que l'écoulement quitte la sphère, se déstabilise et devient instationnaire ; le fluide est alors agité par des mouvements désordonnés qui caractérisent un régime turbulent. On voit aussi qu'à ces nombres de Reynolds, la technique de visualisation par colorant émis à partir de la sphère ne permet de visualiser que le champ proche de l'objet. C'est précisément l'une des propriétés de la turbulence : diffuser et disperser très rapidement la matière qu'elle transporte (ici des

molécules de colorant). En d'autres termes, il est extrêmement difficile, voire impossible, de « saisir » la turbulence à l'aide de fluides colorés, car elle est, par nature, très évanescence.

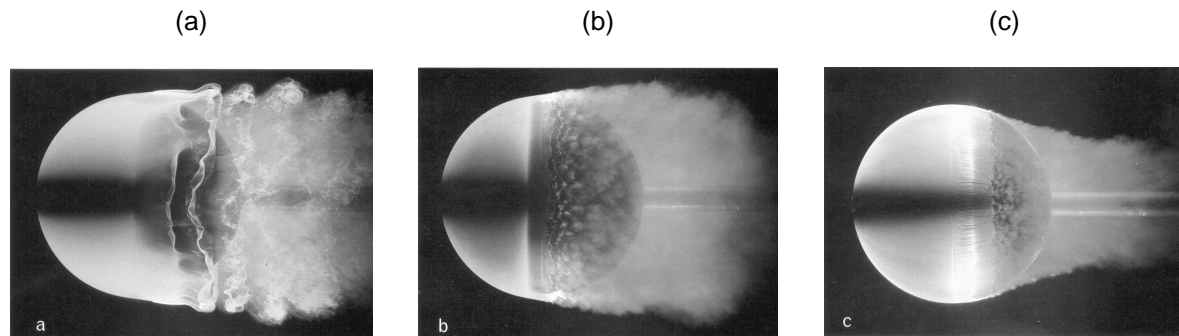


Figure 16.9 - Écoulement autour d'une sphère lisse : (a) $Re = 20\,000$, (b) $Re = 200\,000$, (c) $Re = 300\,000$. Le nombre de Reynolds est $Re = U_0(2a)/\nu$ où U_0 désigne la vitesse de l'écoulement amont et $2a$, le diamètre de la sphère. Tiré de Werlé (1987).

Cette figure illustre aussi la façon dont la turbulence évolue en fonction du nombre de Reynolds. Entre la figure 16.9 (a) et la figure 16.9 (c) on devine un changement de la structure de l'écoulement : celle-ci devient de plus en plus diffuse au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Nous avons introduit plus haut l'idée que la turbulence permet d'adapter le frottement et la dissipation au niveau requis par la puissance des efforts imposés de manière extérieure. Selon ces dernières observations cela semble se traduire par un changement de taille des échelles de ces mouvements turbulents : celles-ci deviennent d'autant plus petites que l'énergie à dissiper est grande.

C'est à partir de ce type d'observations que Richardson (1922) et Kolmogorov (1941) ont suggéré et formalisé le modèle phénoménologique qui est décrit ci-après et qui s'avère capable de lever le « paradoxe » de la turbulence.

➤ Le modèle de la cascade d'énergie de Richardson-Kolmogorov

Dans le cas du problème de la sphère traité ci-dessus, conformément à (16.2.15), on doit donc imaginer un processus dissipatif qui transforme en chaleur une fraction constante de la puissance $\rho U_0^3 a^2$ disponible dans l'écoulement à l'échelle de la sphère, et ceci quel que soit le niveau de cette puissance. **Ce processus dissipatif doit donc être autonome vis-à-vis de toute échelle « extérieure », c'est-à-dire qu'il ne doit dépendre ni de la vitesse caractéristique U_0 du problème ni de la taille caractéristique a de l'objet qui l'engendre.** Il ne doit pas dépendre non plus de la viscosité cinématique du milieu.

Le processus imaginé alors par Richardson (1922) et formalisé par Kolmogorov (1941) est celui d'une **cascade d'énergie** résultant d'une fragmentation de l'écoulement en **structures** d'échelles de tailles décroissantes. Le schéma phénoménologique proposé est illustré sur la figure 16.10 ci-dessous.

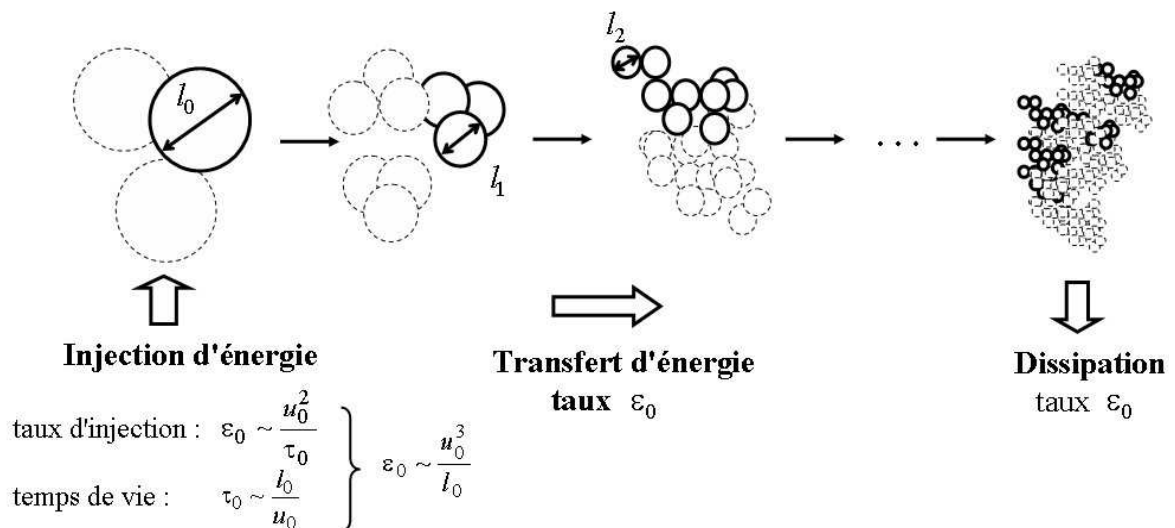


Figure 16.10 - Le schéma de la cascade d'énergie.

Il s'appuie sur le raisonnement en quatre points détaillés dans l'encadré ci-après.

La cascade d'énergie en quatre points -

1 - La turbulence est ramenée à un ensemble de « structures fluides imbriquées », dont la taille caractéristique l et la vitesse caractéristique u_l résultent d'un processus dynamique de brisures successives des « structures » d'échelles l en structures de plus en plus petites.

2 - L'énergie du mouvement est transférée vers les petites structures à partir des plus grandes structures d'échelles l_0 et u_0 où agissent les forces extérieures. Le transfert initial s'effectue à un taux $\varepsilon_0 \sim u_0^2/\tau_0$ où τ_0 désigne le temps de vie des plus grandes structures. En posant $\tau_0 \sim l_0/u_0$, il vient $\varepsilon_0 \sim u_0^3/l_0$.

3 - L'énergie est dissipée, au même taux ε_0 , au niveau des structures qui sont suffisamment petites pour pouvoir être éliminées par l'action du frottement visqueux. Par définition, les échelles (l_v, u_v) de ces structures, appelées **échelles dissipatives**, vérifient $u_v l_v / \nu \approx 1$ (nombre de Reynolds approximativement égal à 1). C'est le **régime visqueux** où s'effectue la transformation de l'énergie cinétique en chaleur.

4 - Pour $l_v \ll l \ll l_0$, qui définit le **régime inertiel**, le transfert de l'énergie entre échelles s'effectue de façon **autosimilaire**, c'est-à-dire de manière identique à toutes les échelles l , et de façon **locale**, ce qui veut dire que l'énergie de chaque structure est entièrement transférée aux sous-structures qu'elle engendre au bout de son temps de vie. La viscosité n'affecte pas ce processus de transfert d'énergie qui est alors purement **inertiel**. Le taux de transfert local aux échelles l vaut $\varepsilon_l \sim u_l^2 / \tau_l \sim u_l^3 / l$ et il est constant et égal à ε_0 , quelle que soit l'échelle l . Les propriétés dynamiques des structures de la turbulence dans le régime inertiel ne dépendent donc que de l et de ε_0 .

Notons que ce qui est conservé dans ce processus de brisure d'échelles ce n'est pas l'énergie des différentes échelles de mouvement, mais le taux de transfert de cette énergie (énergie par unité de temps). Ce taux de transfert doit être égal au taux de l'énergie injectée au niveau des plus grandes échelles de taille l_0 , et il vaut :

$$(16.3.1) \quad \varepsilon_0 \sim u_0^3 / l_0 ,$$

cf. figure **16.10**. Cette puissance massique doit être transférée intacte d'échelles en échelles jusqu'aux **échelles dissipatives**. Ce taux est ainsi égal au taux de dissipation de l'énergie cinétique du mouvement turbulent par unité de masse.

➤ Le modèle de la cascade d'énergie dans l'espace physique

Il convient de noter que la cascade schématisée sur la figure **16.10** ne se déploie pas dans l'espace, mais localement : comme schématisé sur la figure **16.11** ci-dessous, les grosses structures contiennent les plus petites. Pour bien appréhender ce processus, il est conseillé de chiffonner une feuille de papier « en boule ». La boule est la grosse structure ; elle contient des plis qui forment des sous-structures de tailles variables ; et l'épaisseur de la feuille représente alors la plus petite échelle du problème.

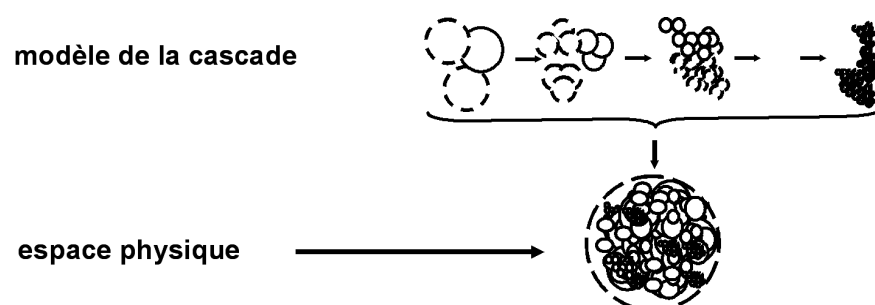


Figure 16.11 - La cascade est un phénomène local dans l'espace physique

➤ **Approfondissement * - La turbulence : un processus fractal ?**

On peut assimiler la feuille de papier chiffonnée évoquée ci-dessus, ou la structure fluide dans l'espace physique schématisée sur la figure **16.11**, à un fractal. Un fractal peut se définir comme un objet dont la surface tend vers l'infini pour un volume donné. La géométrie fractale permet ainsi d'accroître pour un volume donné, la surface d'échange à travers laquelle peuvent s'effectuer des flux. Parmi les nombreux exemples de fractals que l'on peut observer dans la nature on peut citer : le poumon, le réseau sanguin ou encore la structure d'un arbre, autant d'exemples qui optimisent grâce à la géométrie fractale les échanges gazeux de type $O^2 \leftrightarrow CO^2$. Les éclairs, où s'échangent des électrons, ou encore les réseaux routiers qui facilitent les flux de personnes et de marchandises, constituent deux autres exemples. Pour la turbulence dans les fluides, la structure fractale de la turbulence intensifie la dissipation, c'est-à-dire la transformation de l'énergie cinétique en chaleur par frottement. C'est aussi, de ce fait, un mécanisme qui participe à l'accroissement de l'entropie du milieu.

➤ **Le régime inertiel**

Reprenons maintenant le raisonnement en quatre points détaillé plus haut pour décrire la cascade d'énergie. Considérons tout d'abord le point n° 4 qui définit le **régime inertiel**, donc non-visqueux. Il concerne les échelles :

$$(16.3.2) \quad l_v \ll l \ll l_0$$

où l_v et l_0 caractérisent respectivement la plus petite et la plus grande échelle du mouvement dans le champ turbulent. Puisque $\varepsilon_l \sim u_l^3/l \sim \varepsilon_0$, on en déduit que :

$$(16.3.3) \quad u_l \sim (\varepsilon_0 l)^{1/3}$$

Remarque -

Notons que (16.3.3) est bien la seule relation dimensionnelle possible du type $u_l = f(l, \varepsilon_0)$ sachant que la dimension de ε_0 est celle de u_l^3/l , soit L^2T^{-3} .

L'énergie u_l^2 varie donc comme $l^{2/3}$. Les petites structures contiennent donc moins d'énergie. Par contre, conformément à la relation $\varepsilon_l \sim u_l^2 / \tau_l \sim \varepsilon_0$, elles transfèrent cette énergie plus rapidement, avec un temps caractéristique $\tau_l \sim l / u_l$ qui varie aussi comme $l^{2/3}$. Ce processus est non-visqueux et il n'induit aucune dissipation puisque $l \gg l_v$. Mais, puisque $Re_l = u_l l / \nu \propto l^{4/3}$, il permet aussi la décroissance du nombre de Reynolds avec l de sorte que l'on est assuré qu'il existe bien dans l'écoulement une classe d'échelles où la condition $Re_l \approx 1$ est vérifiée, donc où l'action dissipative de la viscosité « reprend le dessus ».

Enfin, le processus s'adapte au taux d'énergie injecté ε_0 de la façon suivante : l'énergie locale u_l^2 varie comme $\varepsilon_0^{2/3}$ et le temps de vie des structures τ_l , comme $\varepsilon_0^{-1/3}$. Donc on a bien, $\forall l, \varepsilon_l \sim u_l^2 / \tau_l \sim \varepsilon_0$

➤ Le régime visqueux

D'après le point n° 3 du raisonnement en quatre points, on détermine les échelles (l_v, u_v) en combinant les relations $u_v^3 / l_v \sim \varepsilon_0$ et $Re_{l_v} = u_v l_v / \nu \approx 1$. On obtient :

$$(16.3.4) \quad \boxed{l_v \sim \left(\nu^3 / \varepsilon_0 \right)^{1/4} \equiv \eta}$$

$$(16.3.5) \quad u_v \sim \left(\nu \varepsilon_0 \right)^{1/4} \equiv u_\eta$$

Ces échelles sont appelées **échelles de Kolmogorov**.

Remarques -

- Ces relations peuvent bien entendu être déduites de l'analyse dimensionnelle en posant $l_v = f(\varepsilon_0, \nu)$, $u_v = f(\varepsilon_0, \nu)$, avec $u_v^3 / l_v \sim \varepsilon_0$ et la condition $u_v l_v / \nu = 1$.
- On prendra soin de ne pas confondre l'échelle de Kolmogorov η définie en (16.3.4) avec la viscosité dynamique de cisaillement.

L'échelle importante ici est l'échelle η qui définit la taille des plus petits mouvements possibles dans l'écoulement. C'est celle où se réalise finalement la dissipation. Elle s'adapte au taux d'énergie ε_0 à transférer : conformément à (16.3.4) elle diminue (resp. augmente) quand le taux de transfert ε_0 augmente (resp. diminue). Enfin, pour une même valeur de ε_0 , ces échelles sont d'autant plus fines que la viscosité du fluide est faible.

On peut alors comprendre de manière intuitive que dans le modèle de la cascade d'énergie, la réduction inertielle de la taille des échelles du mouvement est due à l'effet d'étirement des structures fluides par les cisaillements induits par les structures plus grandes. L'étirement des structures réduit leur épaisseur caractéristique et ce processus se heurte au phénomène antagoniste de la diffusion moléculaire qui tend à augmenter les échelles. Les plus petites échelles résultent donc d'un équilibre entre les deux mécanismes.

C'est de cette façon, en adaptant ainsi sa « texture » au taux d'injection de l'énergie ε_0 , que la turbulence produit les échelles aussi nombreuses et aussi petites que nécessaire pour dissiper la puissance ε_0 injectée dans un écoulement, et cela quelle que soit sa valeur.

➤ Le « coût » de la turbulence

En remplaçant dans l'expression de l'échelle de Kolmogorov (16.3.4) ε_0 par son expression en fonction de la plus grande échelle l_0 , $\varepsilon_0 \sim u_0^3/l_0$, cf. (16.3.1), on trouve que le rapport entre ces échelles vérifie :

$$(16.3.6) \quad \boxed{\frac{l_0}{\eta} \sim \text{Re}_0^{3/4}}$$

où $\text{Re}_0 = u_0 l_0 / \nu$. Cette relation, importante, montre que l'étendue de la cascade d'échelles s'adapte au nombre de Reynolds en évoluant comme sa puissance $3/4$. Pour fixer un ordre de grandeur, dans l'écoulement correspondant à la figure 16.9, pour une sphère d'un diamètre de 10cm (soit une échelle moyenne pour une balle de jeu), en assimilant les plus grandes échelles de vitesse u_0 et de longueur l_0 à U_0 et au diamètre a de l'objet, on obtient $\eta \approx 6\mu\text{m}$. Ainsi, si l'on veut capturer avec un maillage volumique toutes les échelles de cet écoulement turbulent, il est nécessaire de disposer, à minima, d'un nombre de mailles cubiques N_{pt} tel que :

$$(16.3.7) \quad N_{pt} \sim \left(\frac{l_0}{\eta} \right)^3 \sim \text{Re}_0^{9/4}$$

À titre d'exemple, la représentation en volume de l'écoulement de la figure **16.7 (a)**, où $\text{Re}_0 = 20000$, nécessite un maillage d'environ $N_{pt} \approx 4,810^9$ points ! Celui de la figure **16.9 (c)**, où le nombre de Reynolds a été multiplié par 15, nécessite environ 440 fois plus de points, soit plus de 210^{12} !!

Si l'on veut alors résoudre à l'aide d'une méthode numérique les équations de Navier-Stokes sur de tels maillages, il faut aussi discrétiser le temps avec un nombre de pas de temps, N_t , proportionnel au rapport τ_0/τ_v entre le « temps de vie » des plus grandes échelles $\tau_0 \sim l_0/u_0$ et celui des plus petites échelles $\tau_v \sim l_v/u_v = \eta/u_v$. On en déduit que $\tau_0/\tau_v \sim l_0/\eta \times u_v/u_0$. Compte tenu de **(16.3.1)**, **(16.3.4)** et **(16.3.5)**, on trouve :

$$(16.3.8) \quad N_t \sim \text{Re}_0^{1/2}$$

Au total, le calcul « coûte » donc

$$(16.3.9) \quad N_{pt} \times N_t \sim \text{Re}_0^{11/4} \sim \text{Re}_0^3$$

Voilà l'effort nécessaire pour simuler un écoulement turbulent. Nous sommes encore très loin de disposer de la technologie nécessaire pour simuler un avion, où Re_0 peut atteindre 10^9 , ni même une automobile, pour laquelle $\text{Re}_0 \approx 10^7 - 10^8$. Que dire alors de l'atmosphère ! En fait, les ordinateurs actuels ne sont pas encore capables de simuler parfaitement le cas de la figure **16.9 (a)**. Ces limitations ne concernent pas que la puissance du calcul (sa rapidité), mais aussi le stockage des informations. En effet, à chaque pas de temps et en chaque point où l'on résout les équations de la mécanique des fluides, dans l'hypothèse d'un écoulement incompressible homogène, il faut stocker quatre variables : les trois composantes de vitesse et la pression. Pour un avion ou pour l'atmosphère, l'hypothèse du fluide incompressible homogène n'est plus valable ; il faut alors ajouter la température et la densité. Il s'agit donc de mémoriser quatre ou six variables, auxquelles il convient encore d'ajouter les quatre indices du point considéré (espace, temps). Le problème devient vite ingérable. Et nous ne parlons là que de fluide newtonien, monophasique, non chargé, non réactif ... Voilà qui fixe l'étendue du problème de la turbulence d'un point de vue pratique.

16.4 Outils statistiques

Dans les analyses dimensionnelles et phénoménologiques que nous venons d'effectuer ci-dessus, tant à travers l'examen de quantités moyennées dans un volume et dans le temps qu'à travers la notion de structures turbulentes de la cascade de Richardson-Kolmogorov, nous avons adopté un point de vue **statistique**.

Les diverses observations que nous avons pu faire et commenter ci-dessus montrent alors que :

La turbulence dans les fluides qui naît de l'instabilité des écoulements apparaît à travers son analyse statistique comme un mécanisme qui favorise un comportement stable et régulier du milieu.

C'est donc bien des outils statistiques qui vont permettre, sinon de comprendre, du moins de modéliser la turbulence dans les applications pratiques. L'objectif de ce paragraphe est de présenter quelques-uns de ces outils statistiques.

➤ Moyennes

Nous allons donc considérer de nouveau des moyennes statistiques, mais au lieu de nous limiter à des moyennes sur le temps ou sur l'espace nous allons considérer une formulation statistique plus générale de cet opérateur de moyenne : **la moyenne d'ensemble**.

Soit une variable aléatoire $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t)$. Sa **moyenne d'ensemble**, ou espérance mathématique, est :

$$(16.4.1) \quad \langle \underline{u} \rangle(\underline{x}, t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \underline{u}^{(j)}(\underline{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{u}(\underline{x}, t) dp_{\underline{u}}(\underline{x}, t)$$

Ici $\underline{u}^{(j)}$ désigne une **réalisation** de la variable aléatoire $\underline{u}(\underline{x}, t)$, et $p_{\underline{u}}(\underline{x}, t)$, sa densité de probabilité.

Fait important, cette moyenne permute avec les divers opérateurs de dérivation des équations, en temps et en espace.

Un champ fluctuant turbulent peut être alors décomposé en sa **moyenne d'ensemble** et en une **fluctuation** centrée autour de cette moyenne. Par exemple, pour la vitesse on écrit :

$$(16.4.2) \quad \underline{u}(\underline{x}, t) = \langle \underline{u} \rangle(\underline{x}, t) + \underline{u}'(\underline{x}, t)$$

Cette décomposition est appelée **décomposition de Reynolds**. Elle implique que la fluctuation est centrée, c.-à-d. que sa moyenne est nulle. On vérifie bien en effet que :

$$(16.4.3) \quad \langle \underline{u}' \rangle = \langle \underline{u} - \langle \underline{u} \rangle \rangle = \langle \underline{u} \rangle - \langle \langle \underline{u} \rangle \rangle = \langle \underline{u} \rangle - \langle \underline{u} \rangle = 0$$

On a utilisé ici le fait que la moyenne d'ensemble est **idempotente**. Cela signifie que $\langle \langle (\cdot) \rangle \rangle = \langle (\cdot) \rangle$.

À travers la décomposition de Reynolds (16.4.2), la turbulence est donc ramenée à une fluctuation autour d'un état moyen.

➤ Corrélations

On peut alors caractériser la **structure statistique** de la turbulence à partir des moments, ou **corrélations**, du champ des fluctuations. On définit en particulier le **tenseur des corrélations doubles des vitesses** comme la moyenne du produit entre deux fluctuations de vitesses en deux points différents, \underline{x} et \underline{x}' , et en deux instants différents, t et t' :

$$(16.4.4) \quad \underline{\underline{R}}(\underline{x}, \underline{x}'; t, t') = \langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \otimes \underline{u}'(\underline{x}', t') \rangle$$

Ce tenseur admet pour composantes :

$$(16.4.5) \quad R_{ij}(\underline{x}, \underline{x}'; t, t') = \langle u'_i(\underline{x}, t) u'_j(\underline{x}', t') \rangle$$

Si elles dépendaient toujours des coordonnées et du temps, ces quantités statistiques ne seraient d'aucune utilité pratique. Mais il s'avère qu'elles possèdent des propriétés qui permettent effectivement de les utiliser.

➤ Stationnarité statistique

Tout d'abord, les observations montrent que lorsque les conditions aux limites sont stationnaires, les moyennes le sont aussi. On dit alors que la turbulence est **statistiquement stationnaire** au sens où les densités de probabilité de toutes les variables ne dépendent pas du temps. Notamment, pour la moyenne et la corrélation double en un point on peut écrire dans ce cas :

$$(16.4.6) \quad \begin{cases} \langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle = \underline{u}(\underline{x}) \\ \langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \otimes \underline{u}'(\underline{x}, t') \rangle = \underline{\underline{R}}(\underline{x}; \tau = t' - t) \end{cases}$$

La seconde relation stipule que la corrélation entre les fluctuations de vitesse mesurées à deux instants différents t et t' ne dépend pas du temps t mais seulement du décalage temporel $\tau = t' - t$. Les variables vérifient dans ce cas un **principe d'ergodicité** qui rend la moyenne d'ensemble équivalente à la moyenne sur le temps. Ce principe permet d'affirmer que, quelle que soit l'époque où débute le calcul d'une moyenne temporelle, si la durée d'intégration est suffisante la variable aléatoire passera par toutes ses valeurs possibles. Par exemple :

$$(16.4.7) \quad \begin{cases} \langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle = \langle \underline{u} \rangle(\underline{x}) = \underline{\underline{u}}^T(\underline{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T \underline{u}(\underline{x}, t) dt \\ \langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \otimes \underline{u}'(\underline{x}, t') \rangle = \underline{\underline{R}}(\underline{x}; \tau = t' - t) = \underline{\underline{R}}^T(\underline{x}; \tau) \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T [\underline{u}'(\underline{x}, t + t'') \otimes \underline{u}'(\underline{x}, t' + t'')] dt'' \end{cases}$$

C'est cette équivalence entre moyenne d'ensemble et moyenne temporelle qui permet l'analyse expérimentale de la turbulence dans les fluides : une seule réalisation de l'expérience suffit pour déterminer les propriétés statistiques du champ fluctuant, dans la mesure où elle dure suffisamment.

➤ Homogénéité statistique

Certains écoulements turbulents sont aussi **statistiquement homogènes** dans une ou plusieurs directions de l'espace. Cela signifie que leurs densités de probabilité sont invariantes dans ces directions. Dans ces conditions, toute moyenne spatiale dans une direction d'homogénéité devient équivalente à une moyenne d'ensemble. Cette fois, cela facilite les simulations numériques puisqu'on peut effectuer des moyennes à partir d'une seule réalisation temporelle de l'écoulement. Si \underline{e}_i définit une direction d'homogénéité, alors, notamment :

$$(16.4.8) \quad \langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \otimes \underline{u}'(\underline{x} + r_i \underline{e}_i, t) \rangle = \underline{\underline{R}}(r_i, x_{j \neq i}; t)$$

Dans cette relation, on n'effectue pas la sommation d'Einstein sur les indices. La moyenne d'ensemble est alors équivalente à la moyenne dans les directions d'homogénéité. On a par exemple :

$$(16.4.9) \quad \begin{aligned} \langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \otimes \underline{u}'(\underline{x} + r_i \underline{e}_i, t) \rangle &= \underline{\underline{R}}(r_i, x_{j \neq i}; t) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_L [\underline{u}'(x_i + x'_i, x_{j \neq i}, t) \otimes \underline{u}'(x_i + r_i + x'_i, x_{j \neq i}, t)] dx'_i \end{aligned}$$

Cela signifie que quel que soit le lieu où débute le calcul d'une moyenne spatiale, en balayant la ou les directions d'homogénéité sur une distance d'intégration suffisante, la variable aléatoire passera par toutes ses valeurs possibles.

Remarque -

Il faut noter que contrairement à la stationnarité statistique, cf. (16.4.6), l'homogénéité statistique ne retient pas celle d'un champ moyen uniforme, ce qui consisterait à écrire $\langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle = \langle \underline{u} \rangle(\underline{x}_{j \neq i}, t)$. En effet, on peut montrer que les opérateurs des équations régissant les moments statistiques des fluctuations sont des fonctions des gradients du champ moyen seulement. Il suffit donc que les gradients de vitesse soient uniformes pour que le champ fluctuant puisse être statistiquement homogène. Ainsi, dans une turbulence homogène, la vitesse peut donc varier dans l'espace, à la condition que cette variation soit affine. La démonstration détaillée de cette proposition dépasse le cadre de ce cours.

Si l'écoulement est à la fois **statistiquement stationnaire** et **statistiquement homogène** dans la direction \underline{e}_i , alors la dépendance vis-à-vis de t disparaît dans les deux dernières relations ci-dessus.

➤ Isotropie

Enfin, la structure statistique du champ de fluctuation la plus simple que l'on puisse envisager pour la turbulence est celle correspondant à l'**isotropie**. Pour les corrélations d'ordre 2, cette propriété se traduit par la relation :

$$(16.4.10) \quad \langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \underline{u}'(\underline{x} + \underline{r}, t) \rangle = \underline{\underline{R}}(r = \|\underline{r}\|; t) \dots$$

Conformément à cette relation, dans une **turbulence isotrope** les corrélations des fluctuations de vitesse ne dépendent pas de la direction du bipoint $\underline{r} = \underline{x}' - \underline{x}$ considéré, mais uniquement de son module $\|\underline{r}\|$.

16.5 Les équations de Reynolds

C'est grâce à ces outils statistiques que nous allons construire le **modèle des équations de la turbulence** que nous avons évoqué au **chapitre 8** après avoir « découvert » l'existence de ce phénomène instationnaire naturel. Les équations qui décrivent l'évolution du champ de vitesse moyenne $\langle \underline{u} \rangle$ sont appelées **équations de Reynolds**. Ce sont elles que l'on utilise usuellement dans les applications pour **modéliser les équations de Navier-Stokes** dans un écoulement en **régime turbulent**.

Pour les établir, on limitera au cas d'un **écoulement de fluide incompressible homogène sans force de volume, de viscosité constante**. Les équations d'un tel écoulement sont les équations (8.3.15) où l'on néglige le terme de gravité. Le problème dynamique étant découplé du problème thermique, on se concentre sur l'équation de continuité et sur la loi de la dynamique :

$$(16.5.1) \quad \begin{cases} \text{div } \underline{u} = 0 \\ \frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = - \underline{\underline{\text{grad}}} \frac{p}{\rho} + \text{div} (2\nu \underline{\underline{d}}) \end{cases}$$

Notons que pour le terme de diffusion nous avons préféré utiliser ici l'expression $div(2\nu \underline{\underline{d}})$ plutôt que le terme $\nu \Delta \underline{u}$ valable dans ce cadre d'hypothèses, cf. (8.3.15). Ce choix sera justifié bientôt.

On considère la **décomposition de Reynolds (16.4.2)** que l'on applique à la vitesse et à la pression :

$$(16.5.2) \quad \begin{cases} \underline{u}(\underline{x}, t) = \langle \underline{u} \rangle(\underline{x}, t) + \underline{u}'(\underline{x}, t) \\ p(\underline{x}, t) = \langle p \rangle(\underline{x}, t) + p'(\underline{x}, t) \end{cases}$$

La moyenne de l'équation de continuité constitue un bon exercice pour s'habituer à manipuler ces moyennes. Puisque l'on peut permuter la moyenne d'ensemble avec tout opérateur différentiel, on trouve :

$$(16.5.3) \quad \langle div \underline{u} \rangle = \langle div(\langle \underline{u} \rangle + \underline{u}') \rangle = div \langle \langle \underline{u} \rangle + \underline{u}' \rangle = div \langle \langle \underline{u} \rangle \rangle + div \langle \underline{u}' \rangle$$

Donc, puisque $\langle \langle \underline{u} \rangle \rangle = \langle \underline{u} \rangle$ et $\langle \underline{u}' \rangle = 0$:

$$(16.5.4) \quad div \langle \underline{u} \rangle = 0$$

Le champ moyen d'un écoulement à divergence nulle est donc lui-même à divergence nulle. On en déduit alors que le champ fluctuant est aussi à divergence nulle. En effet :

$$(16.5.5) \quad div \underline{u}' = div(\underline{u} - \langle \underline{u} \rangle) = div \underline{u} - div \langle \underline{u} \rangle = 0 - 0 = 0$$

Comme démontré plus bas, pour la quantité de mouvement, la moyenne de la loi dynamique (16.5.1) aboutit à :

$$(16.5.6) \quad \boxed{\frac{D \langle \underline{u} \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle \underline{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \langle \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{u} \rangle = - \underline{grad} \frac{\langle p \rangle}{\rho} + div(2\nu \langle \underline{\underline{d}} \rangle - \langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle)}$$

Cette équation est appelée **équation de Reynolds**. Elle traduit la loi de la dynamique pour le champ de la vitesse moyenne. Dans cette relation :

$$(16.5.7) \quad \frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \nabla(\cdot) \cdot \langle \underline{u} \rangle$$

désigne la **dérivée particulière « en suivant le champ moyen »**.

Démonstration -

Pour un écoulement de fluide incompressible homogène de viscosité constante sans force extérieure, la moyenne de l'équation de la **quantité de mouvement** donne :

$$\left\langle \frac{d\underline{u}}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \right\rangle = \left\langle - \frac{\text{grad } p}{\rho} + \text{div} \left(2\nu \underline{\underline{d}} \right) \right\rangle$$

On peut permuter la moyenne d'ensemble avec les opérateurs différentiels pour les termes linéaires vis-à-vis de \underline{u} ou p , soit :

$$\frac{\partial \langle \underline{u} \rangle}{\partial t} + \langle \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \rangle = - \frac{\text{grad } \langle p \rangle}{\rho} + \text{div} \left(2\nu \langle \underline{\underline{d}} \rangle \right)$$

Il reste à traiter la moyenne de la dérivée convective $\langle \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \rangle$ qui est non-linéaire. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \rangle &= \langle \nabla (\langle \underline{u} \rangle + \underline{u}') \cdot (\langle \underline{u} \rangle + \underline{u}') \rangle \\ &= \langle \nabla \langle \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{u} \rangle \rangle + \langle \nabla \langle \underline{u} \rangle \cdot \underline{u}' \rangle + \langle \nabla \underline{u}' \cdot \langle \underline{u} \rangle \rangle + \langle \nabla \underline{u}' \cdot \underline{u}' \rangle \\ &= \nabla \langle \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{u} \rangle + \nabla \langle \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{u}' \rangle + \nabla \langle \underline{u}' \rangle \cdot \langle \underline{u} \rangle + \langle \nabla \underline{u}' \cdot \underline{u}' \rangle \end{aligned}$$

Soit, puisque $\langle \underline{u}' \rangle = 0$:

$$\langle \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \rangle = \nabla \langle \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{u} \rangle + \langle \nabla \underline{u}' \cdot \underline{u}' \rangle$$

Les termes linéaires vis-à-vis de \underline{u}' ont donc disparu. On a par ailleurs :

$$\nabla \underline{u}' \cdot \underline{u}' = \text{div} (\underline{u}' \otimes \underline{u}') - \underline{u}' \text{div } \underline{u}',$$

ce que l'on vérifie aisément sous forme indicelle pour des coordonnées cartésiennes :

$$u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j} - u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}$$

En définitive, puisque $\text{div } \underline{u}' = 0$:

$$\langle \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \rangle = \nabla \langle \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{u} \rangle + \text{div} \langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle$$

Le premier terme du second membre de cette dernière expression se combine avec la dérivée temporelle pour donner la dérivée particulière « en suivant le champ moyen » (16.5.7). Le second passe au second membre et se combine avec le terme visqueux écrit sous forme divergente, conformément à (16.5.6).

Comme montré ci-dessus, la clef de la démonstration de l'équation de Reynolds (16.5.6) se trouve dans le traitement du terme non-linéaire de convection où s'éliminent naturellement les termes qui sont linéaires vis-à-vis des fluctuations. Seuls subsistent les produits de moyennes et les produits de fluctuations. Conformément à (16.5.6), ces produits de fluctuations introduisent un nouveau tenseur, le **tenseur de Reynolds** :

$$(16.5.8) \quad \begin{cases} \underline{\underline{R}}(\underline{x}, t) = \langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \otimes \underline{u}'(\underline{x}, t) \rangle \\ R_{ij}(\underline{x}, t) = \langle u'_i(\underline{x}, t) u'_j(\underline{x}, t) \rangle \end{cases}$$

La contrainte totale vaut :

$$(16.5.9) \quad \underline{\underline{\tau}} = 2\nu \langle \underline{\underline{d}} \rangle - \langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle$$

Dans cette expression, à la **contrainte visqueuse** usuelle vient donc s'ajouter le **tenseur de Reynolds** $\langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle$ (avec un signe « - ») qui représente les **contraintes turbulentes**.

Comme souligné au début de ce chapitre, dans un écoulement turbulent la divergence de ces contraintes turbulentes caractérise le **transport macroscopique** de la quantité de mouvement. L'effet de ce transport sur la vitesse moyenne est usuellement **très supérieur** à celui de la diffusion visqueuse $\text{div}(2\nu \underline{\underline{d}}) = \nu \nabla \langle \underline{u} \rangle$.

Enfin, fait important, l'équation de Reynolds (16.5.6) **n'est pas fermée** puisqu'elle nécessite la connaissance d'un nouveau terme $\langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle$. Dans de très nombreuses applications industrielles de la mécanique des fluides on cherche à déterminer des champs moyens. Pour cela, il faut donc déterminer le tenseur des contraintes turbulentes $\langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle$. Pour ces applications, le problème de la turbulence est donc entièrement ramené à ce niveau.

Remarque -

En procédant de la même manière, on peut établir des équations de Reynolds pour la moyenne d'autres variables que la vitesse. Par exemple, pour la température T , l'équation de $\langle T \rangle$ fera alors apparaître un terme de flux turbulents $\langle \underline{u}'T' \rangle$ qui viendra s'ajouter au terme de flux $\chi_{grad} \langle T \rangle$ qui caractérise la conduction.

16.6 Application : l'écoulement turbulent dans un canal

À ce stade nous disposons de suffisamment d'outils pour analyser quelques problèmes pratiques. L'exemple que nous avons choisi est celui de l'écoulement dans un canal plan. Nous connaissons la solution en régime stationnaire pour un écoulement cylindrique, cf. **chapitre 9**, paragraphe **9.2**. Le choix d'une géométrie bidimensionnelle (canal plan) facilite ici l'analyse du régime turbulent.

➤ Hypothèses

Comme schématisé sur la figure **16.12** ci-dessous on considère donc un canal entre deux plaques planes séparées d'une hauteur h .

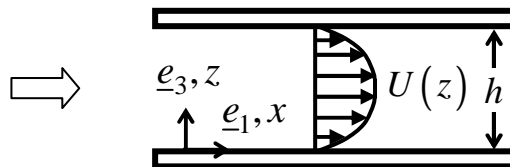


Figure 16.12 - Écoulement de Poiseuille turbulent dans un canal plan : définitions.

On fait les hypothèses suivantes :

- H1** - L'écoulement est celui d'un fluide **incompressible homogène de viscosité constante sans force de volume**.
- H2** - L'écoulement est **turbulent**.
- H3** - L'écoulement est statistiquement stationnaire.
- H4** - Le champ moyen est unidirectionnel. Cela est confirmé par l'expérience. On pose donc :

$$(16.6.1) \quad \langle \underline{u} \rangle(\underline{x}, t) = U(z) \underline{e}_1$$

Ce champ moyen ne dépend pas du temps compte tenu de l'hypothèse **H3**, cf. (16.4.6).

H5 - L'écoulement est **statistiquement homogène** dans les directions \underline{e}_1 et \underline{e}_2 .

Cette dernière hypothèse signifie que toute moyenne d'ensemble de produits de fluctuations est nulle dans ces directions particulières. Notamment, le tenseur de Reynolds $\langle u'_i u'_j \rangle$, qui est une moyenne de produits de fluctuations en un seul point et au même instant, ne dépend que de la coordonnée z qui caractérise la seule direction d'homogénéité de l'écoulement, cf. (16.4.8) :

$$(16.6.2) \quad \begin{cases} \langle u'_i u'_j \rangle(\underline{x}) = \langle u'_i(\underline{x}, t) u'_j(\underline{x}, t) \rangle = R_{ij}(0, 0, z) \\ \frac{\partial}{\partial x} \langle u'_i u'_j \rangle(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial y} \langle u'_i u'_j \rangle(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

Il est aussi indépendant du temps compte tenu de l'hypothèse **H3**.

Les hypothèses **H3**, **H4** et **H5** sont confirmées par l'expérience.

➤ Equations

Compte tenu de (16.6.1) la décomposition de Reynolds moyenne-fluctuation (16.5.2) s'écrit donc, pour la vitesse :

$$(16.6.3) \quad \begin{cases} \langle \underline{u} \rangle(\underline{x}, t) = U(z) \underline{e}_1 + \underline{u}'(\underline{x}, t) \\ \underline{u}'(\underline{x}, t) = u'(\underline{x}, t) \underline{e}_1 + v'(\underline{x}, t) \underline{e}_2 + w'(\underline{x}, t) \underline{e}_3 \end{cases}$$

On notera bien qu'un champ de vitesse fluctuante \underline{u}' associé à la turbulence doit **toujours** être considéré comme **tridimensionnel**, d'où la seconde relation (16.6.3).

Le nombre de Reynolds que l'on doit considérer ici est basé sur la vitesse de débit moyenne :

$$(16.6.4) \quad \begin{cases} \text{Re}_h = \frac{U_d h}{\nu} \\ U_d = \frac{1}{h} \int_0^h U(z) dz \quad \text{- vitesse de débit moyenne} \end{cases}$$

Puisque l'écoulement est supposé turbulent, ce nombre de Reynolds doit être supérieur à la valeur critique $\text{Re}_c \approx 2000$ identifiée sur les figures 9.3 et 9.4 du chapitre 9. Cela est confirmé par les visualisations de la figure 16.13 ci-dessous.

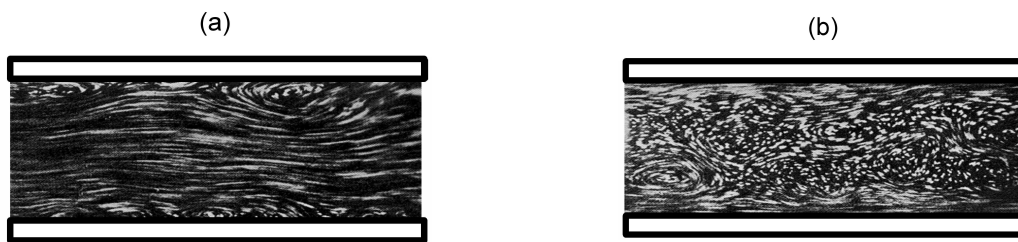


Figure 16.13 - Visualisation d'écoulements de Poiseuille turbulents dans un canal plan au moyen de clichés de l'écoulement ensemençé par des particules réfléchissantes : (a) $\text{Re}_h = 5000$, (b) $\text{Re}_h = 20000$. La vitesse considérée pour ce nombre de Reynolds est la vitesse moyenne de débit U_d , cf. (16.6.4).

Dans le premier membre de l'équation de Reynolds (16.5.6), l'hypothèse **H3** élimine la dérivée partielle par rapport au temps. Le terme convectif est également nul puisque l'écoulement moyen est unidimensionnel. Tenant compte de (16.6.1) on a en effet :

$$(16.6.5) \quad \nabla \langle \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{u} \rangle = \frac{dU}{dz} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3) \cdot U \underline{e}_1 = U \frac{dU}{dz} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3) \cdot \underline{e}_1 = 0$$

Donc le premier membre de (16.5.6) est nul pour cette application. Pour le terme de transport relatif au tenseur de Reynolds, d'après l'hypothèse d'homogénéité statistique **H5**, puisque seules les dérivées selon z demeurent, cf. (16.6.2), cela donne :

$$(16.6.6) \quad \text{div} \langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle = \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_j} \underline{e}_i \delta_{j3} = \frac{\partial \langle u' w' \rangle}{\partial z} \underline{e}_1 + \frac{\partial \langle v' w' \rangle}{\partial z} \underline{e}_2 + \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} \underline{e}_3$$

L'équation de Reynolds (16.5.6) se réduit donc au système suivant :

$$(16.6.7) \quad \begin{cases} 0 = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\langle p \rangle}{\rho} + \nu \frac{d^2 U}{dz^2} - \frac{d \langle u' w' \rangle}{dz} \\ 0 = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\langle p \rangle}{\rho} - \frac{\partial \langle v' w' \rangle}{\partial z} \\ 0 = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\langle p \rangle}{\rho} - \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} \end{cases}$$

En notant pour le gradient longitudinal de la **pression moyenne** :

$$(16.6.8) \quad G \equiv -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} > 0,$$

la dérivation des trois équations (16.6.7) par rapport à la variable x montre alors que :

$$(16.6.9) \quad 0 = -\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial z}$$

Donc G est constant :

$$(16.6.10) \quad G = \text{const.}$$

Le problème se ramène donc à la première équation (16.6.7) que l'on peut mettre sous la forme :

$$(16.6.11) \quad G + \frac{d}{dz} \left(\underbrace{\eta \frac{dU}{dz} - \rho \langle u' w' \rangle}_{\tau(z)} \right) = 0$$

L'équation (16.6.11) est l'homologue de l'équation (9.2.17) obtenue au **chapitre 9** pour l'écoulement de Poiseuille cylindrique stationnaire. Elle traduit de nouveau l'équilibre entre la force de pression moyenne qui pousse l'écoulement et la force de frottement qui le ralentit. Mais maintenant, le frottement comporte deux contributions distinctes : le frottement visqueux et le frottement turbulent. On posera ainsi :

$$(16.6.12) \quad \boxed{G + \frac{d\tau}{dz} = 0}$$

où τ est la **contrainte totale**, somme de la **contrainte visqueuse**, que l'on note τ^η , et de la **contrainte turbulente**, que l'on note τ^{turb} :

$$(16.6.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau(z) = \tau^\eta(z) + \tau^{turb}(z) \\ \tau^\eta(z) = \eta \frac{dU}{dz} \\ \tau^{turb}(z) = -\rho \langle u'w' \rangle(z) \end{array} \right.$$

➤ **Solution laminaire (écoulement de Poiseuille plan)**

Dans le cas de la géométrie de la figure **16.12**, si l'écoulement est laminaire, donc tel que $\langle u'w' \rangle = 0$, on déduit de l'intégration de **(16.6.12)** que la contrainte visqueuse est linéaire :

$$(16.6.14) \quad \tau(z) = \tau^\eta(z) = \eta \frac{dU}{dz} = -Gz + const.$$

Elle doit par ailleurs vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$(16.6.15) \quad \tau(0) = -\tau(h) = \tau_p,$$

où τ_p désigne le frottement pariétal. On a supposé ce faisant que le champ de vitesse moyenne est symétrique par rapport au plan de symétrie du canal. Les expériences le confirment. On en déduit que :

$$(16.6.16) \quad \tau_p = \frac{1}{2} Gh,$$

La loi de frottement à travers le canal s'écrit donc :

$$(16.6.17) \quad \tau(z) = \tau^\eta(z) = \eta \frac{dU}{dz} = G \left(\frac{h}{2} - z \right)$$

Par intégration, on trouve alors un profil parabolique caractéristique de l'écoulement de Poiseuille plan :

$$(16.6.18) \quad U(z) = -\frac{1}{2\eta} G z(z-h)$$

➤ Cas turbulent

Dans le cas turbulent, par intégration de (16.6.12) c'est la **contrainte totale** qui est linéaire en z :

$$(16.6.19) \quad \tau(z) = \tau^\eta(z) + \tau^{turb}(z) = -Gz + const.$$

La contrainte turbulente $\tau^{turb}(z) = -\rho \langle u'w' \rangle$ doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

✓ Sur les parois, en $z=0$ et $z=h$:

$$(16.6.18) \quad \tau^{turb}(0) = \tau^{turb}(h) = 0$$

En effet, la condition d'adhérence supprime la vitesse totale, donc autant sa moyenne que sa fluctuation. D'où la relation ci-dessus. On a donc de nouveau :

$$(16.6.19) \quad \tau(0) = \tau^\eta(0) = -\tau^\eta(h) = -\tau(h) = \tau_p = \frac{1}{2} Gh,$$

✓ Au centre du canal, en $z=h/2$, on doit avoir :

$$(16.6.20) \quad \tau^{turb}\left(\frac{1}{2}h\right) = 0$$

C'est une condition nécessaire pour qu'en régime turbulent, l'écoulement moyen possède les mêmes symétries que l'écoulement laminaire, soit $U(z) = U(h-z)$. Cela est confirmé par

les expériences. Pour cela la contrainte totale au centre du canal doit être nulle, soit $\tau(h/2) = \tau^{turb}(h/2) = 0$. D'où la relation ci-dessus.

Dans ces conditions, l'intégration de (16.6.17) mène à la même distribution du frottement total que celle du cas laminaire (16.6.17) :

$$(16.6.21) \quad \tau(z) = \tau^\eta(z) + \tau^{turb}(z) = G \left(\frac{h}{2} - z \right)$$

➤ Solution : aspects qualitatifs

A ce stade, contrairement au cas laminaire, **on ne peut pas intégrer l'équation (16.6.21)** pour obtenir $U(z)$, car la tension de Reynolds $\langle u'w' \rangle(z)$ qui définit le frottement turbulent $\tau^{turb}(z)$ demeure inconnue. Mais nous disposons maintenant d'assez d'éléments pour expliquer qualitativement comment le frottement turbulent modifie l'allure du champ de vitesse moyenne $U(z)$ dans le canal par rapport au cas laminaire.

En effet, compte tenu de la condition d'adhérence (16.6.18), la turbulence n'est libre de se développer que loin des parois. Elle domine alors le frottement total. Par ailleurs la contrainte turbulente $\tau^{turb}(z)$ associée à cette turbulence s'annule au centre du canal, cf. (16.6.20). Sa distribution prend donc forcément la forme représentée par la courbe en trait épais sur la figure 16.14 ci-dessous. La contrainte totale est linéaire. Elle est représentée par la droite en trait fin sur la figure. Par soustraction, on en déduit la distribution de la contrainte visqueuse $\tau^\eta(z)$ représentée par la courbe en pointillés sur la figure 16.14.



Figure 16.14 - Distribution des contraintes visqueuses et turbulentes dans un canal plan.

Le profil de la vitesse moyenne $U(z)$ qui en résulte se déduit alors de la distribution de son gradient $dU/dz = \tau^\eta / \eta$. Si l'on compare pour **un même gradient de pression**, donc pour un même frottement pariétal, un écoulement de conduite laminaire et un écoulement de conduite turbulent (donc deux écoulements à des nombres de Reynolds différents), on obtient les distributions de la vitesse moyenne schématisées sur la figure **16.15** ci-dessous.

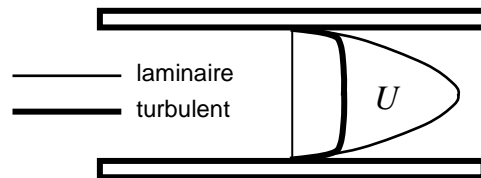


Figure 16.15 – Profil de la vitesse moyenne dans un écoulement de conduite : comparaison entre un régime laminaire et un régime turbulent (même gradient de pression).

Ces distributions s'interprètent comme suit :

- ✓ Si l'écoulement est **laminaire**, la contrainte τ^η est affine. Son profil correspond à la ligne en trait fin sur la figure **16.14**. On obtient alors par intégration le profil parabolique en trait fin de la figure **16.15**.
- ✓ Dans le cas turbulent, il faut intégrer maintenant le profil de la contrainte représenté en traits pointillés de la figure **16.14**. La vitesse moyenne $U(z)$ perd alors son caractère parabolique en s'aplatissant consécutivement à la forte diminution de son gradient dans la région centrale de la conduite. Par ailleurs, puisque l'on considère un même gradient de pression, le frottement pariétal τ_p est identique dans les deux écoulements. Cela signifie que la pente du profil de U au niveau de la paroi est conservée. Le profil de $U(z)$ qui en résulte est celui représenté avec un trait épais sur la figure **16.15**.

On en conclut que pour un gradient de pression donné, la turbulence diminue **le débit de la conduite** par rapport au régime laminaire. Corrélativement, pour un débit de la conduite donné, comparé à un écoulement laminaire, un écoulement turbulent nécessite une **augmentation du gradient de pression**, cela afin de compenser l'augmentation du frottement par la turbulence au sein de l'écoulement.

Remarque -

Sur un plan pratique, la situation évoquée sur la figure **16.5** concernant le changement entre un régime laminaire et un régime turbulent pour un même gradient de pression impliquerait que l'on puisse « contrôler » par un moyen quelconque un tel changement de régime. Dans le cas des fluides newtoniens on peut déclencher un

régime turbulent dans une conduite lisse laminaire en tapissant les parois de cette conduite par des rugosités. Cela peut en effet « déclencher » un régime turbulent, par ailleurs laminaire dans le cas où les parois de la conduite sont lisses. Notons toutefois que cela n'est possible que dans la mesure où le nombre de Reynolds n'est pas très petit devant le nombre de Reynolds critique Re_c à partir duquel la turbulence apparaît de manière naturelle dans une conduite lisse (nous avons vu au **chapitre 9** qu'un consensus expérimental se situe autour de la valeur $Re_c = 2000$, cf. figure **9.3**). Par contre, la situation inverse consistant à agir sur un écoulement turbulent établi pour le rendre laminaire fait l'objet de recherches intensives : nous ne savons pas encore comment réaliser cela. Cet objectif, consistant à « relaminariser » un écoulement turbulent, constitue une sorte de paradigme pour un nouveau domaine de spécialité de la mécanique des fluides qui s'appelle le « contrôle des écoulements ». Notons que, conformément à la figure **16.15**, puisque le passage d'un régime turbulent à un régime laminaire engendre une augmentation du débit de la conduite pour un même gradient de pression, la « relaminarisation » d'un écoulement turbulent revient à obtenir un écoulement laminaire pour un nombre de Reynolds supérieur à celui du régime turbulent de l'écoulement. La tâche est donc « ardue ». Mais rien n'empêche aujourd'hui, sur un plan théorique, que cela puisse être réalisé. L'absence de théorie mathématique rigoureuse sur la turbulence laisse en effet cette possibilité ouverte.

➤ Conclusion

On voit ainsi que les équations de Reynolds qui résultent de l'application d'une moyenne d'ensemble aux équations de Navier-Stokes est un outil qui permet d'avancer dans la compréhension physique de problèmes turbulents concrets.

16.7 Résumé des formules essentielles

➤ La cascade de Richardson-Kolmogorov

✓ **Taux d'injection de l'énergie = taux de transfert = taux de dissipation (par unité de masse),** cf. (16.3.1)

$$(16.7.1) \quad \varepsilon_0 \sim u_0^3 / l_0$$

✓ **Domaine inertiel,** cf. (16.3.2), (16.3.3)

$$(16.7.2) \quad l_v \ll l \ll l_0$$

$$(16.7.3) \quad u_l \sim (\varepsilon_0 l)^{1/3}$$

✓ **Domaine visqueux - Echelles de Kolmogorov,** cf. (16.3.4), (16.3.5)

$$(16.7.4) \quad l_v \sim \left(\nu^3 / \varepsilon_0 \right)^{1/4} \equiv \eta$$

$$(16.7.5) \quad u_v \sim (\nu \varepsilon_0)^{1/4} \equiv u_\eta$$

✓ **Rapport d'échelles,** cf. (16.3.6)

$$(16.7.6) \quad \frac{l_0}{\eta} \sim \text{Re}_0^{3/4}$$

➤ Outils statistiques

✓ **Décomposition de Reynolds,** cf. (16.4.2)

$$(16.7.7) \quad \underline{u}(\underline{x}, t) = \langle \underline{u} \rangle(\underline{x}, t) + \underline{u}'(\underline{x}, t)$$

✓ **Stationnarité statistique,** cf. (16.4.6)

$$(16.7.8) \quad \begin{cases} \langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle = \langle \underline{u} \rangle(\underline{x}) \\ \langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \otimes \underline{u}'(\underline{x}, t') \rangle = \underline{\underline{R}}(\underline{x}; \tau = t' - t) \end{cases}$$

✓ **Homogénéité statistique**, cf. (16.4.8)

Si \underline{e}_i définit une direction d'homogénéité :

$$(16.7.9) \quad \langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \otimes \underline{u}'(\underline{x} + r_i \underline{e}_i, t) \rangle = \underline{\underline{R}}(\underline{x}_{j \neq i}, r_i; t)$$

➤ **Les équations de Reynolds (cas d'un écoulement incompressible homogène de viscosité constante sans force de volume)**✓ **Continuité**, cf. (16.5.4)

$$(16.7.10) \quad \text{div} \langle \underline{u} \rangle = 0$$

✓ **Equation de la dynamique**, cf. (16.5.6)

$$(16.7.11) \quad \frac{D\langle \underline{u} \rangle}{Dt} = -\underline{\text{grad}} \frac{\langle p \rangle}{\rho} + \text{div} (2\nu \langle \underline{d} \rangle - \langle \underline{u}' \otimes \underline{u}' \rangle)$$

✓ **Dérivée matérielle en suivant le champ moyen**, cf. (16.5.7)

$$(16.7.12) \quad \frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \nabla(\cdot) \cdot \langle \underline{u} \rangle$$

✓ **Tenseur de Reynolds**, cf. (16.5.8)

$$(16.7.13) \quad \begin{cases} \underline{\underline{R}}(\underline{x}, t) = \langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \otimes \underline{u}'(\underline{x}, t) \rangle \\ R_{ij}(\underline{x}, t) = \langle u'_i(\underline{x}, t) u'_j(\underline{x}, t) \rangle \end{cases}$$